



Creación de unas Tablas de Mortalidad Dinámicas

**Estudio realizado por: José Antonio Guerra Díez
Tutor: Montserrat Guillén Estany**

**Tesis del Máster en Dirección de Entidades
Aseguradoras y Financieras**

Curso 2007/2008

Agradecimientos a Lorea y a Montse por muchas cosas, pero sobre todo por su paciencia. Gracias.

Josean.

Resumen Contenido.

La gran mayoría de participantes en la séptima edición del master en dirección de entidades aseguradoras, desempeñamos nuestra función en departamentos de grandes empresas aseguradoras. El negocio asegurador tiene razón de ser en los sucesos aleatorios que suceden de forma repentina durante la vida de las personas y las cosas. Es por este motivo por lo que las entidades aseguradoras utilizan abstracciones matemáticas para medir y poder poner un precio a los sucesos aleatorios que perjudican la situación económica de las personas y/o de las empresas. Si bien es cierto que cada vez la abstracción matemática es más compleja, la evolución de la tecnología nos facilita la labor de realizar estudios para poder realizar una gestión de nuestro negocio de la manera más eficiente.

Los seguros de supervivencia en particular debido a su propia esencia y al público al que se dirige, han sido fuertemente regulados y controlados por los diferentes gobiernos. No obstante, las entidades aseguradoras no debemos dejar en manos del gobierno la posibilidad de que nos guíe nuestro negocio, es por ello que debemos colaborar con él en todo aquello que tiene influencia en el elemento básico de nuestro negocio, es decir, medir el riesgo al que nos exponemos al vender cada póliza de seguro.

La gran majoria de participants en la setena edició del màster en direcció d'entitats asseguradores, desenvolupem la nostra funció en departaments de grans empreses asseguradores. El negoci assegurador té raó d'ésser en els successos aleatoris que succeïxen de forma sobtada durant la vida de les persones i les coses. És per aquest motiu pel que les entitats asseguradores utilitzen abstraccions matemàtiques per a mesurar i poder posar un preu als successos aleatoris que perjudiquen la situació econòmica de les persones i/o de les empreses. Si bé és cert que cada vegada l'abstracció matemàtica és més complexa, l'evolució de la tecnologia ens facilita la labor de realitzar estudis per a poder realitzar una gestió del nostre negoci de la manera més eficient.

Les assegurances de supervivència en particular a causa de la seva pròpia essència i al públic al que es dirigeix, han estat fortament regulats i controlats pels diferents governs. No obstant això, les entitats asseguradores no hem de deixar en mans del govern la possibilitat que ens guïi el nostre negoci, és per això que hem de col·laborar amb ell en tot allò que té influència en l'element bàsic del nostre negoci, és a dir, mesurar el risc al que ens exposem al vendre cada pòlissa d'assegurança.

The most of the participants of the 7th Insurance Company Management master edition develop our function in departments/desks of the top insurance companies. Insurance business exists due to the random incidents that occur suddenly during the people and things live. For this reason, insurance companies use mathematics abstractions/methods to measure and be able to price the random incidents that damages the economic situation of the people

and/or the enterprises. Although each time the mathematics methods/abstractions are more complex, technology advances make the work easier to carry out with studies that make our business easier to manage efficiently.

The survival insurance are hardly ruled by the different governments due to its own essence and the people that they are addressed to. Even though, insurance companies don't have to lead the possibility of leading our business in hands of the government, and for this reason we have to cooperate with it in anything related with the basic components of our business, so we have to measure the risk in which we are exposed at the moment we sell an insurance policy.

Índice

RESUMEN CONTENIDO.....	3
1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	6
2. ANÁLISIS DE LA BASE DE DATOS.....	6
2.1. HORIZONTE TEMPORAL.....	6
2.2. CARACTERÍSTICAS DE LA BASE DE DATOS.....	6
2.3. DESCRIPCIÓN GENERAL.....	7
3. ANÁLISIS SEXO MASCULINO.....	9
3.1 COMPOSICIÓN DE LOS EXPUESTOS AL RIESGO.....	9
3.2. EVOLUCIÓN DE LAS TASAS BRUTAS DE FALLECIMIENTO.....	10
3.3. CONCLUSIÓN ANÁLISIS SEXO MASCULINO.....	13
4. ANÁLISIS SEXO FEMENINO.....	13
4.1 COMPOSICIÓN DE LOS EXPUESTOS AL RIESGO.....	13
4.2. EVOLUCIÓN DE LAS TASAS BRUTA DE FALLECIMIENTO.....	15
4.3. CONCLUSIÓN ANÁLISIS SEXO FEMENINO.....	18
5. CREACIÓN DEL MODELO AJUSTADO.....	18
5.1. PREVIO.....	18
5.2. DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO. METODOLOGÍA UTILIZADA.....	18
5.3. ELECCIÓN DEL MODELO SEXO MASCULINO.....	19
5.4. NIVEL DE AJUSTE Y TEST ESTADÍSTICOS PARA EL MODELO SELECCIONADO SEXO MASCULINO.....	22
5.4.1. <i>Coefficiente de determinación, R^2</i>	22
5.4.2. <i>Test de la Chi cuadrado</i>	23
5.5. ELECCIÓN DEL MODELO SEXO FEMENINO.....	25
5.6. NIVEL DE AJUSTE Y TEST ESTADÍSTICOS PARA EL MODELO SELECCIONADO SEXO FEMENINO.....	27
5.6.1. <i>Coefficiente de determinación, R^2</i>	27
5.6.2. <i>Test de la Chi cuadrado</i>	28
6. RECARGOS DE SEGURIDAD.....	30
6.1 RECARGO POR DESVIACIÓN (SEXO MASCULINO / SEXO FEMENINO).....	30
6.2. RECARGO POR CAMBIO (SEXO MASCULINO / SEXO FEMENINO).....	31
7. TANTO DE MEJORA SEXO MASCULINO Y SEXO FEMENINO.....	31
7.1. FACTOR DE MEJORA DE LA MORTALIDAD RF(x; T) (PERM/F2006).....	32
7.2. FACTOR DE MEJORA CORRESPONDIENTE A LAS TABLAS PERM/F-2000P (PERM/F2006 RESOLUCIÓN 03102000).....	33
8. APLICACIÓN DE LAS TABLAS A PRODUCTOS ASEGURADORES. COMPARACIÓN CON LAS TABLAS DE REFERENCIA PERM/F-2000P Y PERM/F-2000C.....	36
8.1. TABLAS PERM/F2006 VERSUS TABLAS PERM/F-2000C Y PERM/F-2000P.....	37
8.2. TABLAS PERM/F2006 RESOLUCIÓN 03102000 VERSUS TABLAS PERM/F-2000C Y PERM/F-2000P.	39
9. CONCLUSIONES / DECISIONES.....	41
10. BIBLIOGRAFÍA.....	44

1. Presentación del problema.

Con el presente estudio se va a analizar una base datos para la población española obtenida de internet para medir la tasa bruta de mortalidad y su evolución.

Se realizarán las acciones oportunas para poder representar la tasa bruta de mortalidad y su evolución mediante una función matemática.

Se calcularán los recargos que se deben aplicar a las tasas brutas de mortalidad y se creara la correspondiente tabla de mortalidad dinámica.

Por último se realizará una comparación de los resultados entre la tabla generada en este trabajo y las tablas de referencia hoy en día en el mercado español (PERM/F-2000P Y PERM/F-2000C).

2. Análisis de la base de datos.

2.1. Horizonte temporal.

El estudio comprende el período 1908 a 2006, ambos incluidos, garantizando un volumen suficiente de expuestos al riesgo que permite realizar un análisis completo de la mortalidad española. No obstante, se ha trabajado sobre los datos 2004 a 2006 para obtener un modelo matemático que represente la tasa de mortalidad. Posteriormente, con el resto de la información, se ha elaborado un tanto de mejora de la mortalidad a partir de la experiencia.

2.2. Características de la base de datos.

Los datos corresponden a la página web www.mortality.org.¹ En la mencionada página web hay datos para llevar cabo estudios de supervivencia para la mayoría de países europeos.

La información se obtiene de la mencionada página web en dos ficheros de texto, un fichero hace referencia a los expuestos al riesgo y el otro fichero hace referencia a los fallecimientos. La información esta desglosada por:

- Año de observación
- Edad
- Numero de expuestos /Fallecidos - Sexo Femenino
- Numero de expuestos /Fallecidos - Sexo Masculino
- Numero de expuestos /Fallecidos - Total

¹ La base de datos se ha obtenido de la pagina web www.mortality.org, en los datos correspondientes al país España.

2.3. Descripción general.

La información que se ha manejado para este estudio es de 130.205.570 expuestos al riesgo distribuidos:

- 64.106.346 individuos del sexo masculino expuestos al riesgo
- 66.099.224 individuos del sexo femenino expuestos al riesgo

De los datos se desprende que existe un equilibrio en el género de los expuestos (ver *gráfico 1*).

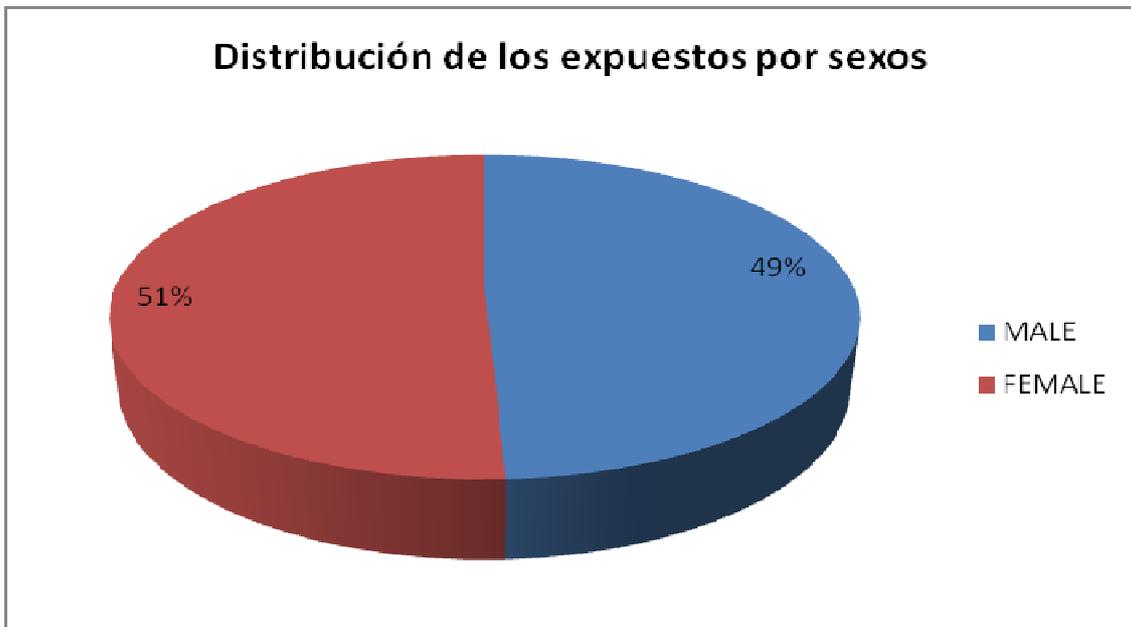


Gráfico 1. La distribución por sexos de la cartera de individuales está equilibrada entre ambos sexos.

La distribución por edades de los expuestos al riesgo es prácticamente la misma en ambos sexos (ver *gráfico 2*). No obstante, se puede apreciar como en la primera etapa el número de expuestos del sexo masculino es superior al sexo femenino, esta característica cambia a partir de la edad de 46 años, desde la cual el número de expuestos del sexo femenino es superior al masculino y se mantiene así hasta final las edades observadas.

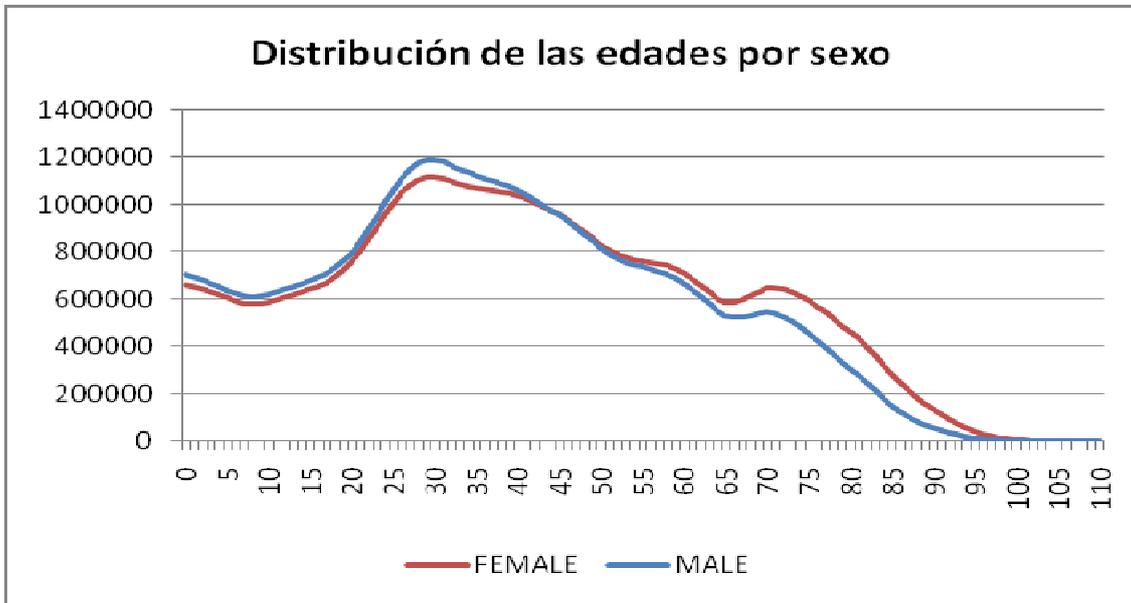


Gráfico 2. Las distribuciones son prácticamente idénticas. Mencionar que existe un punto de corte a los 46 años.

A continuación, se muestra un cuadro en el que se presentan el número de expuestos al riesgo, salidas por muerte y el porcentaje de individuos por sexo que abandonan el estudio por sobrevenir el fallecimiento, en el cual se puede observar que no existen grandes diferencias por sexo

	Male	Female	Total
Número de casos	64.106.346	66.099.224	130.205.570
Fallecimiento	590.851	539.916	1.130.767
%Fallecimiento	0,009216732	0,008168265	0,00868447

Cuadro 1. Resumen por sexo

3. Análisis sexo masculino.

3.1 Composición de los expuestos al riesgo.

Se dispone de 64.106.346 asegurados, con edades comprendidas entre los 0 y los 110 años y una edad media ponderada de 38,60 años. La clasificación en cinco grupos de veintidós años cada uno muestra la siguiente distribución:

- el 24,66 por ciento de los asegurados pertenece al rango de edades de 0 a 22 años
- el 39,04 por ciento al rango de 23 a 45 años
- el 25,21 por ciento al de 46 a 68 años
- el 10,91 por ciento al de 69 a 91 años, y
- el 0,19 por ciento al de 92 a 110 años.

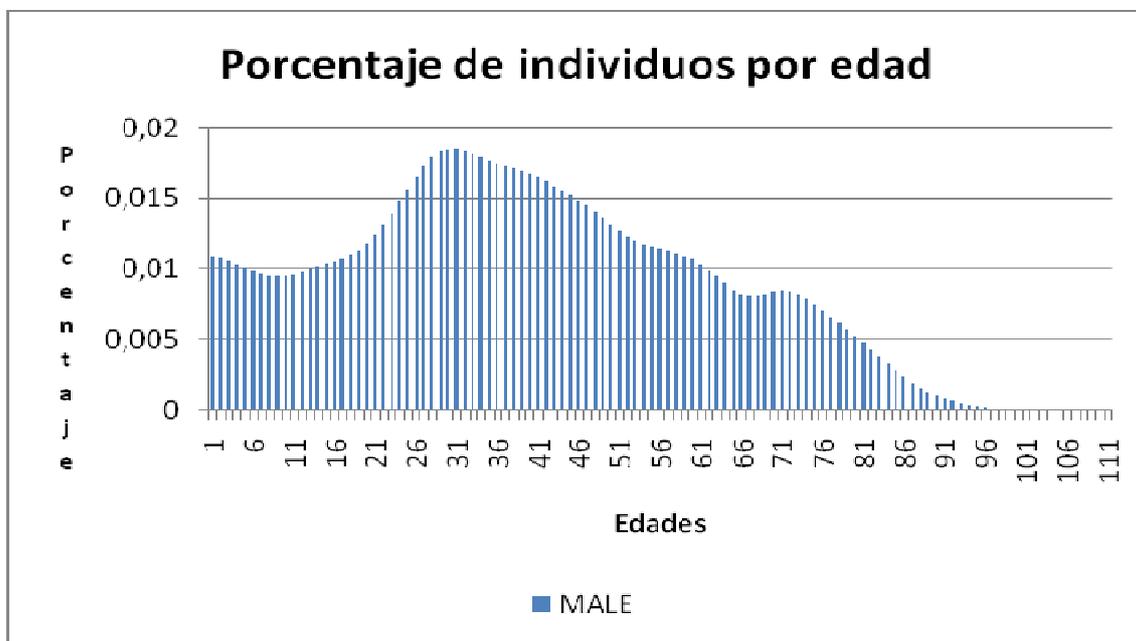


Gráfico 3. Distribución del número de individuos por edades y en porcentaje del volumen de expuestos al riesgo.

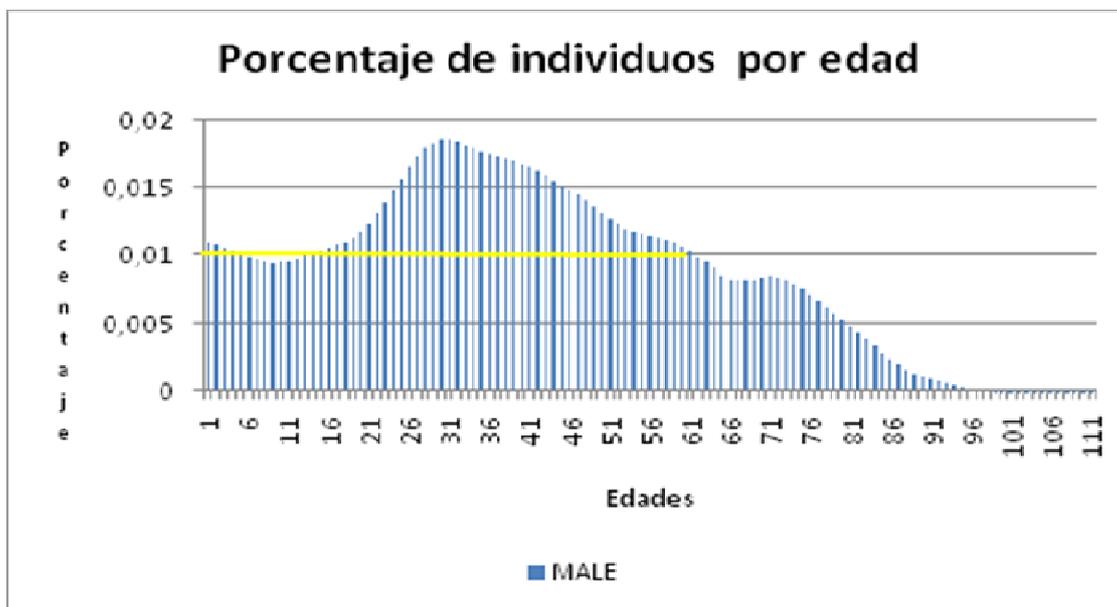


Gráfico 4. El 80'86 por ciento de los expuestos se encuentra entre los 0 y los 59 años.

3.2. Evolución de las tasas brutas de fallecimiento.

Anteriormente se ha indicado que la base de datos presenta información relativa al período 1908 a 2006, no obstante el estudio de la evolución de la siniestralidad se efectúa comparando los períodos anuales consecutivos: 2004-2005 y 2005-2006 y el período 2004 a 2006 para determinar la evolución anual.

En general se observan dos tipos de comportamiento:

- Un comportamiento prácticamente homogéneo entre los 0 y los 100 años. Las variaciones respecto a años anteriores son mínimas por lo que en general se puede hablar de una siniestralidad con un comportamiento constante.
- Un comportamiento homogéneo en cuanto a tasas crecientes respecto a cambio de pendiente en la tasa entre las edades 101 años y 110 con respecto al grupo de edades desde 0 a 100 años. Comentar que, se puede observar que existen diferencias puntuales en edades concretas respecto a la tasa de siniestralidad. Estas diferencias puntuales se deben al menor número de expuestos al riesgo para edades avanzadas lo cual implica que la volatilidad para estas edades sea mayor.

En los siguientes gráficos se identifican los comportamientos descritos anteriormente.

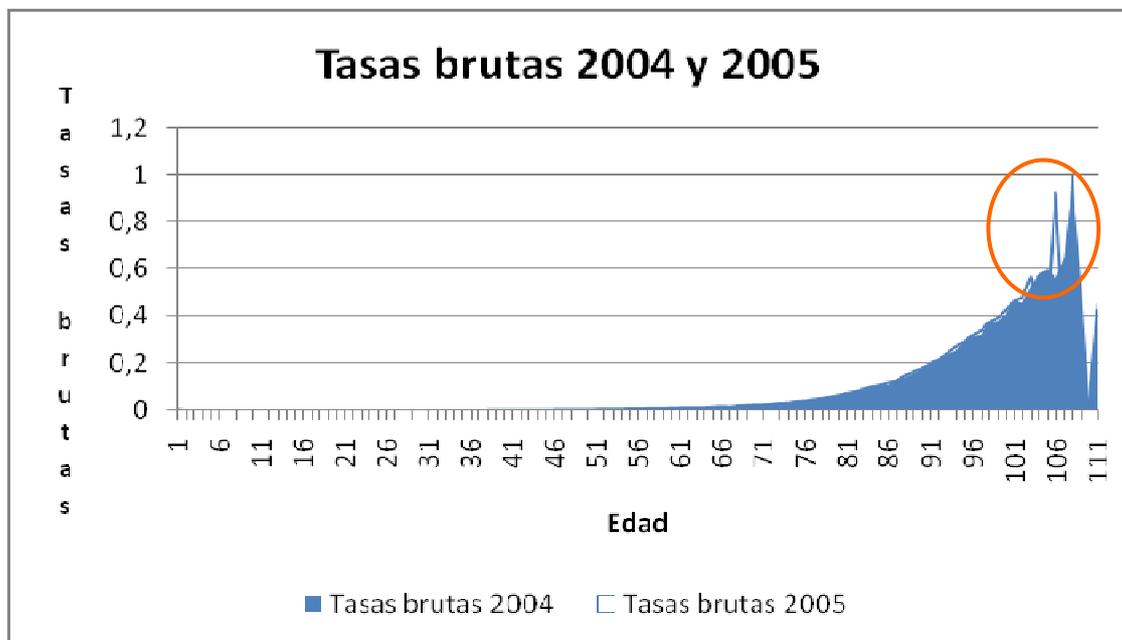


Gráfico 5. Las tasas del 2005 se representan de una manera similar a las tasas brutas del 2004, únicamente cabe destacar el incremento de de la tasa bruta en el año 2005 para la edad de 105 años.

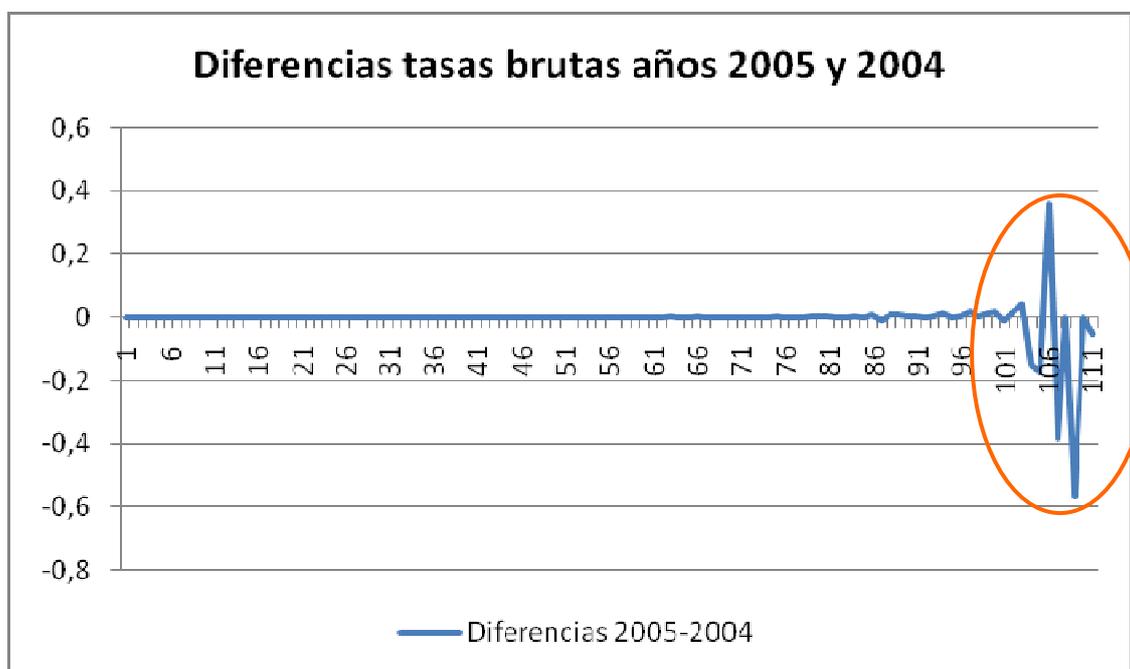


Gráfico 6. En este gráfico se observa como las tasas de ambos años se mantienen semejantes hasta llegar a las edades avanzadas, donde se aprecia tres picos uno positivo y dos negativos lo que nos da una idea de que las tasas brutas tienen una evolución general descendiente del año 2005 respecto al año 2004.

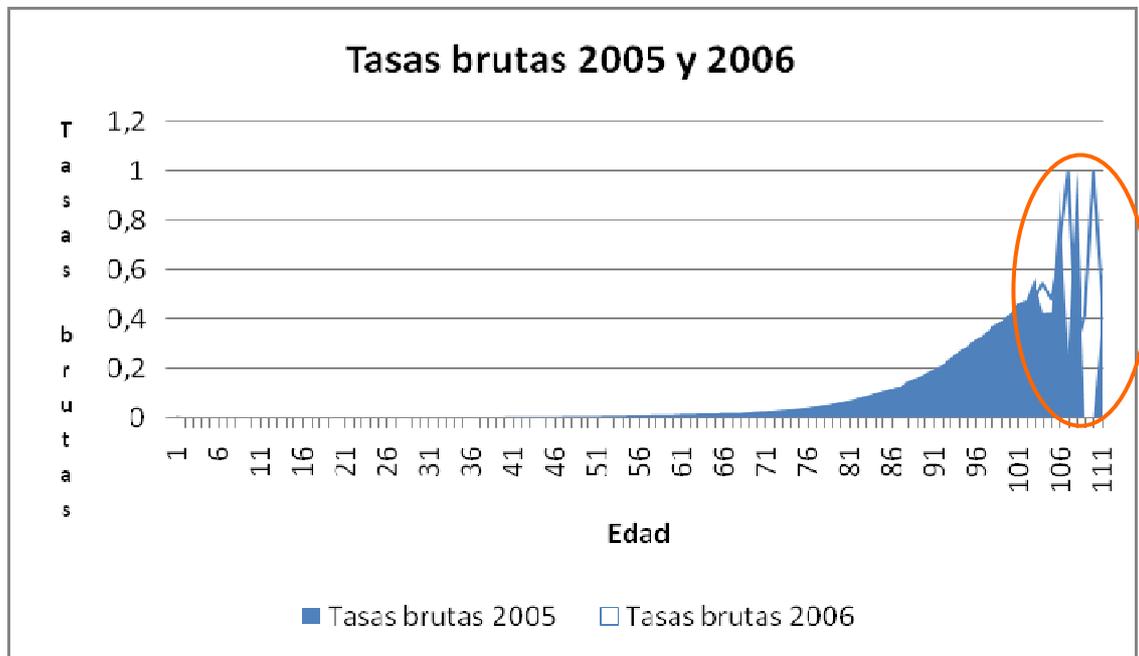


Gráfico 7. La tendencia es similar entre ambos años, pero al igual que el en grafico 6 a las edades avanzadas se observan las mayores diferencias.

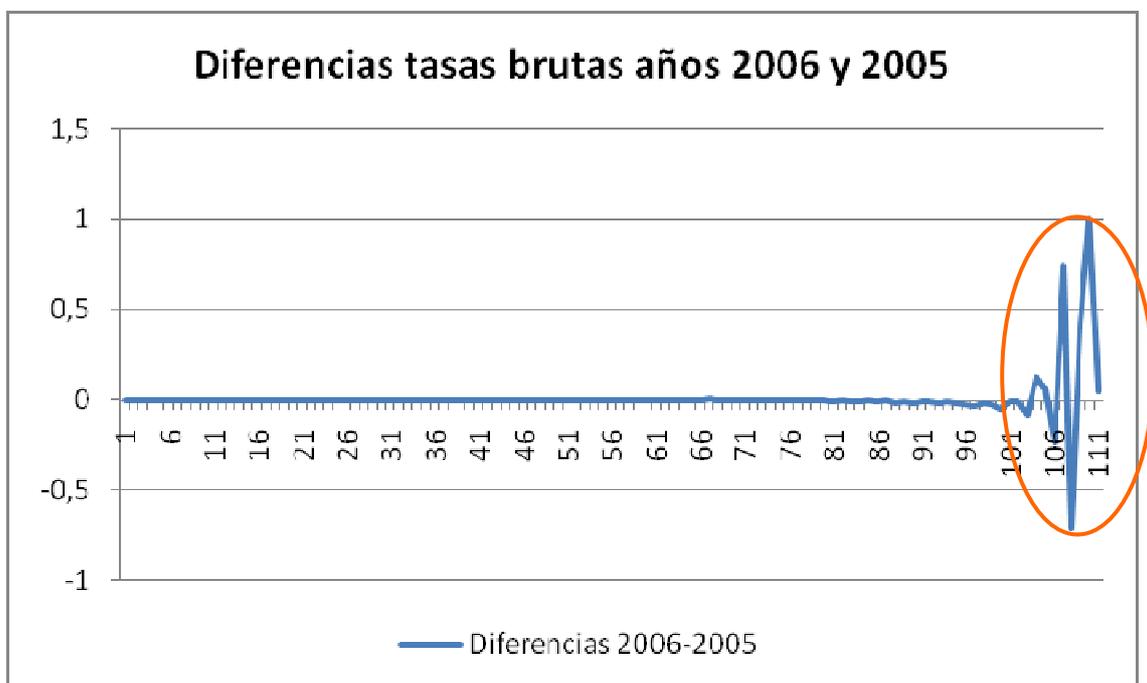


Gráfico 8. La comparación de las tasas brutas entre los años 2006 y 2005 se observa una evolución constante en el tiempo, únicamente mencionar que para las edades avanzadas se produce un incremento en la frecuencia a diferencia que en el grafico 6 donde se observa un decremento.

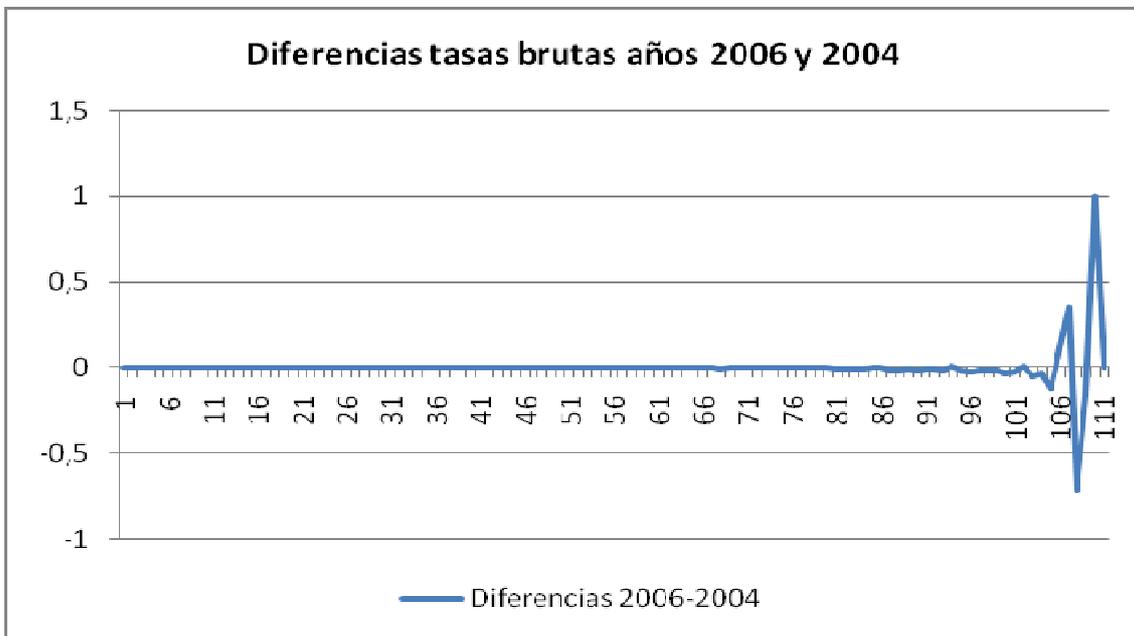


Gráfico 9. En el gráfico no se aprecian grandes cambios. La evolución de la tasa bruta se mantiene constante a lo largo de los años. Es a las edades avanzadas donde el número de expuestos es menor, donde se pueden apreciar cambios de tendencias entre un año y otro.

3.3. Conclusión análisis sexo masculino.

El volumen de expuestos al riesgo del sexo masculino es del 49 por ciento, concentrándose el 80'86 por ciento entre los 0 y los 59 años de edad arrojando una edad media 38'60 años.

En cuanto a la tendencia de la siniestralidad no se aprecia una tendencia clara. El gap, ya sea en sentido positivo o en sentido negativo, resultante de la comparación entre años se acrecienta a edades más avanzadas debido a la escasa muestra para estas edades.

4. Análisis sexo femenino.

4.1 Composición de los expuestos al riesgo.

Se dispone de 66.099.224 expuestos al riesgo, el 51 por ciento del total, con edades comprendidas entre los 0 y los 110 años, y una edad media ponderada de 41,30 años. La distribución de los expuestos, en función del criterio utilizado anteriormente para el sexo masculino, es la siguiente (agrupación por tramos de edades de 22 años):

- el 22,67 por ciento de los asegurados pertenece al rango de edades de 0 a 22 años
- el 36,26 por ciento al rango de 23 a 45 años
- el 25,62 por ciento al de 46 a 68 años

- el 14,92 por ciento al de 69 a 91 años, y
- el 0,53 por ciento al de 92 a 110 años.

La distribución de las edades en la cartera es prácticamente idéntica a la que se observó para el sexo masculino, si bien llama la atención que en los tres últimos intervalos el sexo femenino tiene más representación de sus expuestos al riesgo, mientras que para los dos primeros intervalos es el sexo masculino quien tiene más representación. Esta situación puede ser debido a la mayor longevidad del sexo femenino gracias a sus mejores hábitos, no obstante, los tiempos van cambiando y los roles de hombres y mujeres son cada vez más similares igualándose la longevidad para ambos sexos.

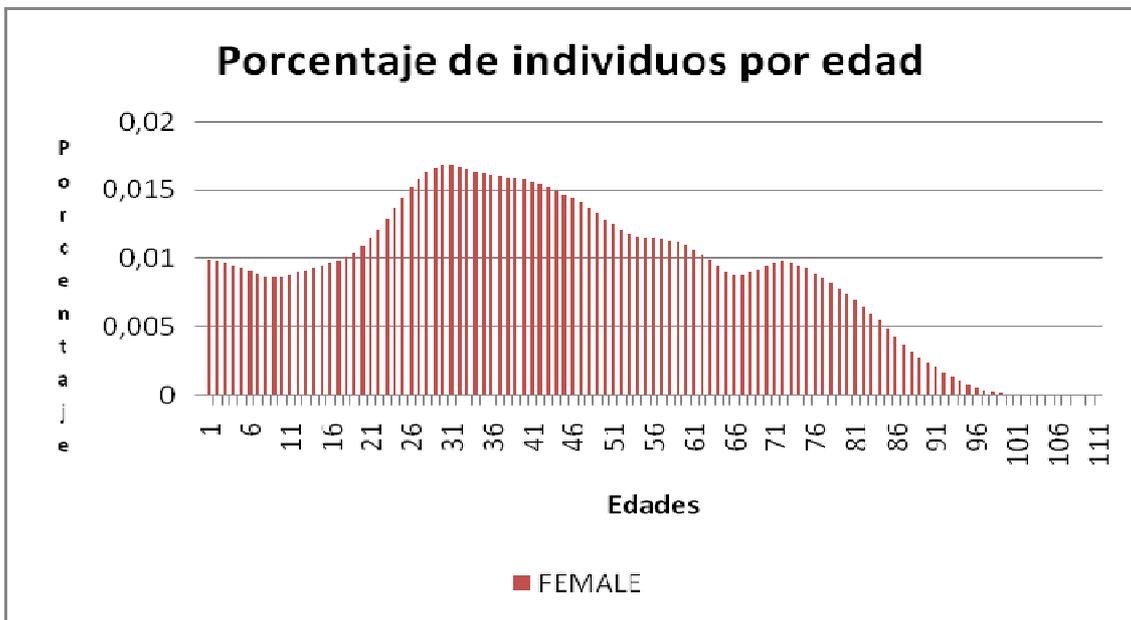


Gráfico 10. Distribución del número de expuestos por edades y en porcentaje del total de exposiciones.

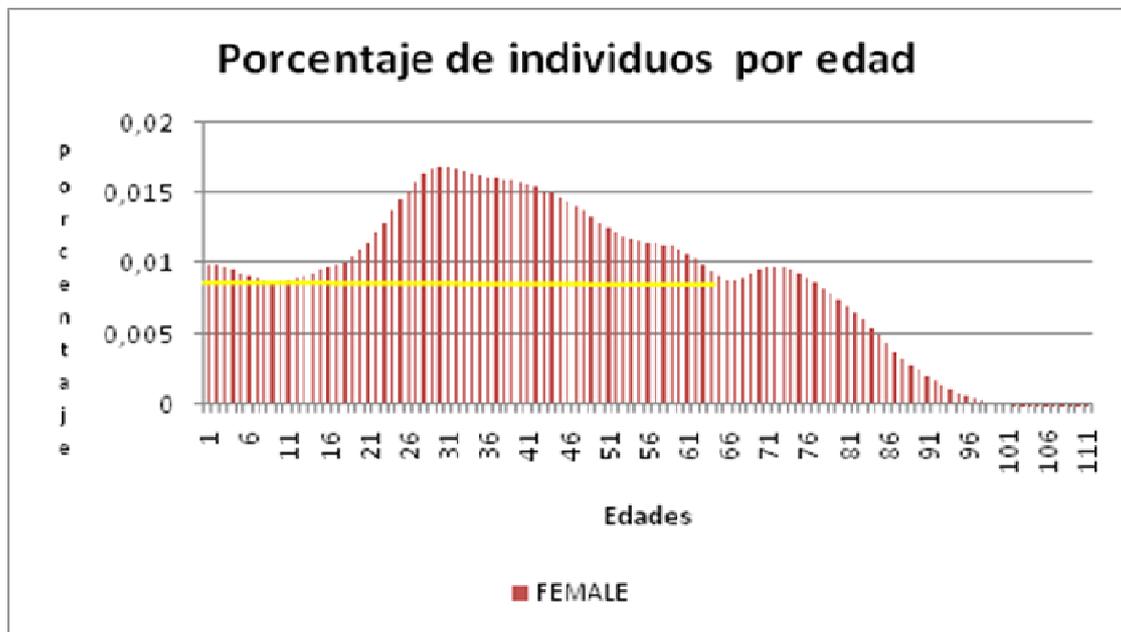


Gráfico 11. Las mujeres presentan un comportamiento muy similar al de los hombres. Las edades comprendidas entre los 0 y los 63 años representan al 80,04 por ciento de los expuestos.

4.2. Evolución de las tasas bruta de fallecimiento.

Análogamente al desarrollo del sexo masculino se presentan graficadas, a efectos de poder establecer la evolución anual de la siniestralidad, las tasas brutas para los períodos 2004-2005, 2005-2006 y 2004-2006.

En general las tasas brutas presentan una tendencia estable a lo largo de los años analizados. El gap entre años se hace mayor en las edades superiores donde debido a la escasa muestra se dan fluctuaciones de un año a otro.

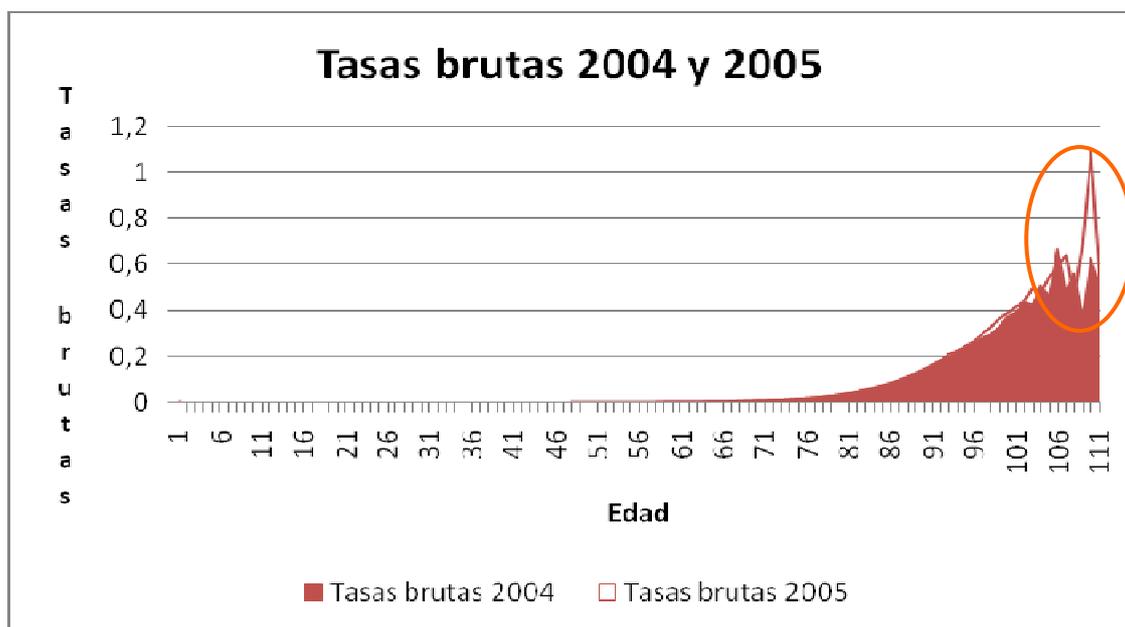


Gráfico 12. Destacar la alta volatilidad en las edades superiores.

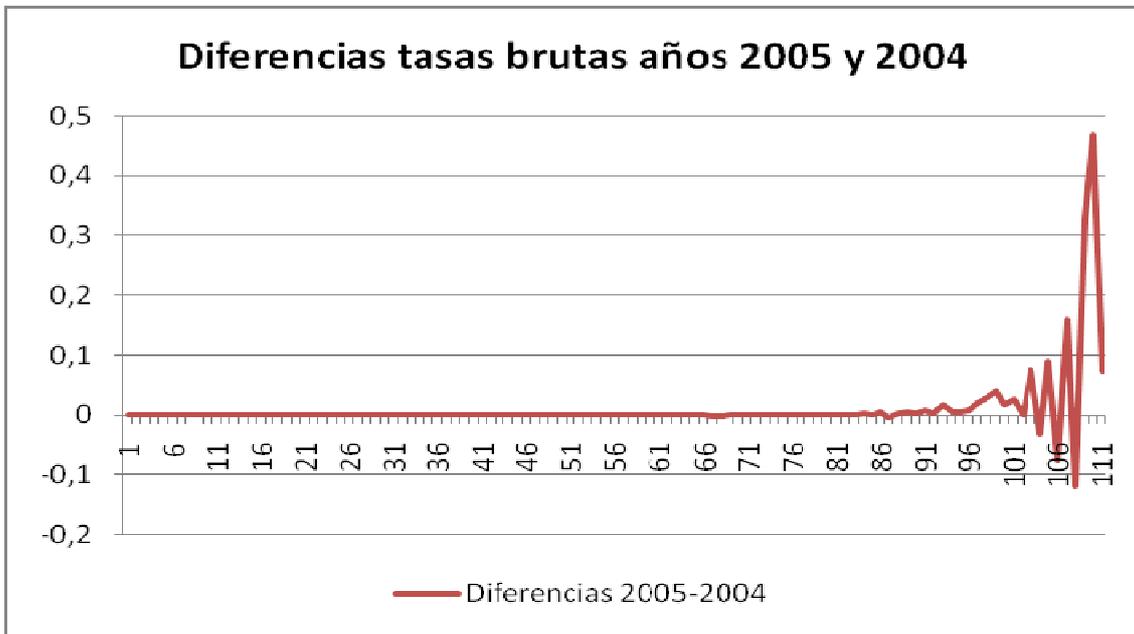


Gráfico 13. Destacar el incremento a los 110 años del año 2005 respecto al 2004.

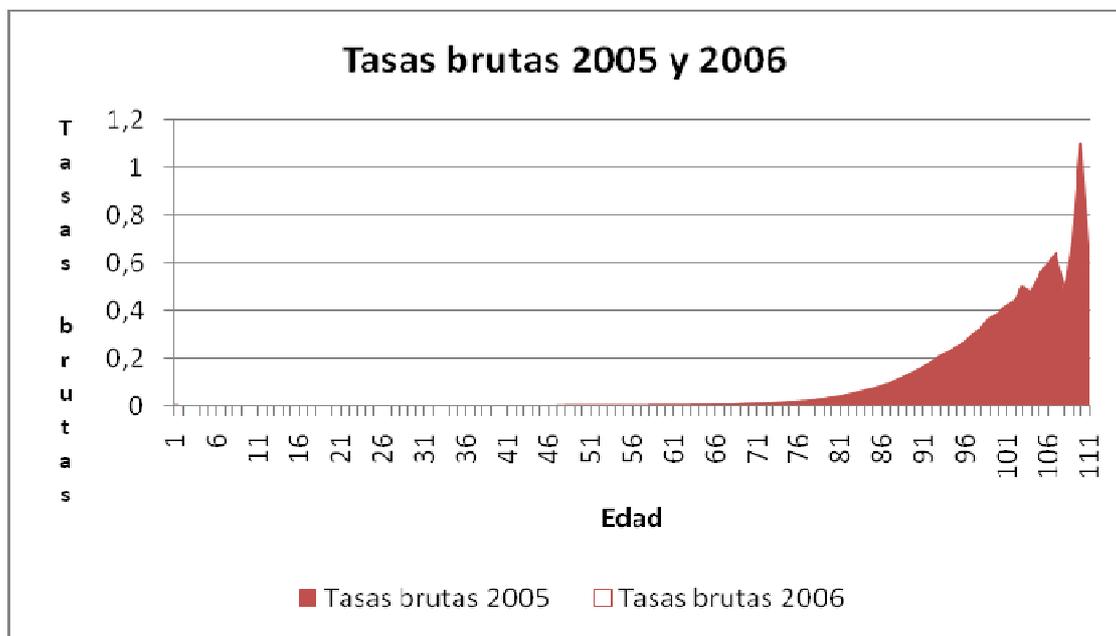


Gráfico 14. La tasa bruta del 2005 es superior a la tasa bruta del año 2006.

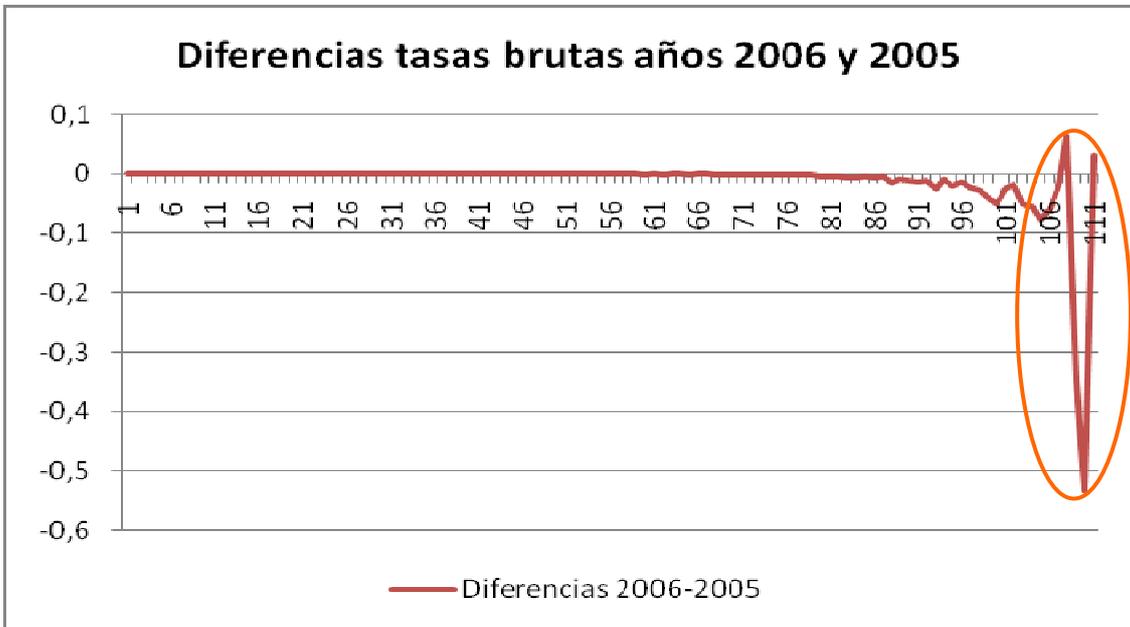


Gráfico 15. Observamos como la tendencia nos indica que la tasa bruta 2006 para las edades avanzadas es menor que la tasa bruta del año 2005.

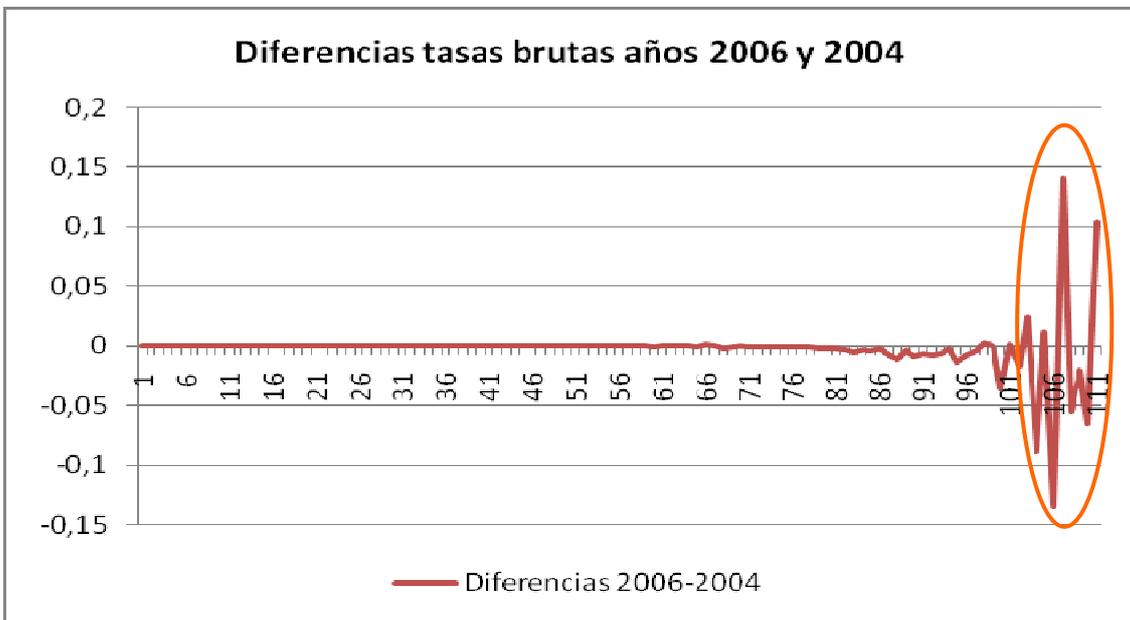


Gráfico 16. En este gráfico observamos la gran volatilidad existente a las edades avanzadas provocada por el escaso número de expuestos y salidas para estas edades.

4.3. Conclusión análisis sexo femenino.

El volumen de expuestos al riesgo del sexo femenino es del 51 por ciento, concentrándose el 80'04 por ciento entre los 0 y los 63 años de edad arrojando una edad media de 41,30 años, mayor que la media del sexo masculino situada en 38'60 años. Esta diferencia en la edad media de los expuestos por sexos viene explicada por la mayor longevidad del sexo femenino, no obstante, debido que las diferencias entre sexos cada vez son menores en todos los ámbitos, nos hace suponer que en un futuro no habrá diferencia entre sexos en lo que respecta a la longevidad.

En cuanto a la tendencia de la siniestralidad, al igual que lo comentado anteriormente para el sexo masculino no se aprecia una tendencia clara. El gap, ya sea en sentido positivo o en sentido negativo, resultante de la comparación entre años se acrecienta a edades más avanzadas debido a la escasa muestra para estas edades.

5. Creación del modelo ajustado.

5.1. Previo.

En las secciones 3 y 4 se han analizado los datos agregados diferenciados por sexo del que se desprenden las siguientes observaciones:

- el volumen de datos para ambos sexos es próximo al 50 por cien
- no parece que existan diferencias significativas de siniestralidad entre los sexos

En consecuencia, el ajuste del modelo se realizará sobre todo el tramo de edades, es decir desde la edad 0 a 110 años y diferenciando por sexo. No existen grandes diferencias entre la evolución de la tasa bruta de fallecimiento del sexo masculino y del sexo femenino, no obstante, realizaremos un modelo ajustado diferenciando por sexo, ya que la experiencia así nos lo recomienda.

5.2. Determinación del modelo matemático. Metodología utilizada.

Las tasas brutas observadas están sujetas a fluctuaciones achacables a diferentes circunstancias, entre otras, el tamaño del colectivo y los tramos de edades con pocas observaciones. Para corregir estas irregularidades y ofrecer una representación más suave de las tasas se ha graduado la experiencia a través de estimación paramétrica, concretamente utilizando la formulación *Gompertz-Makeham*² de grado (r,s) :

² *On Graduation By Mathematical Formula*, por D.O. Forfar, J.J. McCutcheon y A.D. Wilkie

$$GM^{r,s}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot x^{i-1} + \sum_{i=r+1}^{r+s} EXP(\alpha_i \cdot x^{i-r-1})$$

siendo

$$x = \frac{Edad - (Edad_{\text{mínimo}} + Edad_{\text{máximo}})}{(Edad_{\text{máximo}} - Edad_{\text{mínimo}})} \cdot 2$$

con la convención de que las sumas desaparecen si $r = 0$ ó $s = 0$.

En el proceso de ajuste se ha ensayado la función $GM^{r,s}(x)$ para valores (r,s) : (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7), (0,8), (0,9), (0,10), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (6,0), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (7,0), (7,1), (7,2), (7,3), (8,0), (8,1), (8,2), (9,0), (9,1), (10,0)

De los métodos más utilizados para hallar los valores de los parámetros de las funciones de ajuste:

- maximización de la verosimilitud, y
- minimización de la suma de los errores cuadráticos, e_t

se ha optado, debido a numerosos problemas de cálculo con la verosimilitud, por utilizar la minimización de la suma de los errores cuadráticos, e_t .

$$\begin{aligned} & \text{mín} \left[\sum_{j=18}^{64} (GM^{r,s}(j) - TasaBruta_j)^2 \right] \\ & \text{mín} \left[\sum_{j=18}^{64} (e_t)^2 \right] \end{aligned}$$

Los resultados de cada modelo se han comparado en función del nivel de ajuste, de la suavidad de la función y del número de parámetros.

5.3. Elección del modelo sexo masculino.

Tal y como se ha comentado anteriormente vamos a trabajar sobre todo el rango de edades, es decir, desde la edad 0 hasta la edad 110 años.

Sobre esos datos se realizó un primer ajuste para todo el rango de edades, obteniendo unas tasas ajustadas que no se ajustan de forma adecuada a los cambios de tendencia de las tasas brutas. Por este motivo, para garantizar un ajuste lo más satisfactorio posible, se realizan ensayos partiendo el colectivo de estudio en grupos de edades de 0 a 20 años, 21 a 80 años y de 81 a 110 años.

De esta forma el ajuste entre el modelo matemático y las tasas brutas de fallecimiento es mucho más favorable.

Para cada uno de los grupos de edad, en base a los modelos matemáticos resultantes se seleccionaron aquellos que mejor cumple los criterios, suavidad, número de parámetros, coeficiente de determinación y test estadístico de la chi-cuadrado.

El modelo que mejor se ajusta a los datos, evaluados todos los ensayos con los criterios expuestos en el párrafo anterior es:

$$\text{Modelos seleccionados} \begin{cases} \text{GM}(7,3), \text{ si } 0 \leq \text{edad} < 21 \\ \text{GM}(5,8), \text{ si } 21 \leq \text{edad} < 81 \\ \text{GM}(10,9), \text{ si } 81 \leq \text{edad} \end{cases}$$

	0 a 20 (GM(7,3))	21 a 80 (GM(5,9))	81 a 110 (GM(10,9))	0 a 110 Modelo Agregado
R ²	0,998706446	0,996834758	0,974497084	0,990247124
P-value (X ²)	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000

Cuadro 2. Resumen estadístico

Viendo el resultado del estadístico de la chi-cuadrado podemos afirmar que los modelos propuestos para cada tramo se ajustan de forma correcta. En adición, el modelo agregado resultante de agrupar los modelos de los diferentes tramos de edad también pasa de forma favorable el test estadístico de la chi-cuadrado. Por este motivo no rechazaremos la hipótesis nula de que las tasas de fallecimiento modelizadas son semejantes a las tasas brutas de fallecimiento.

A continuación presentaremos la representación grafica del modelo junto con las tasas brutas para cada uno de los tramos de edad seleccionado y para el modelo agregado.

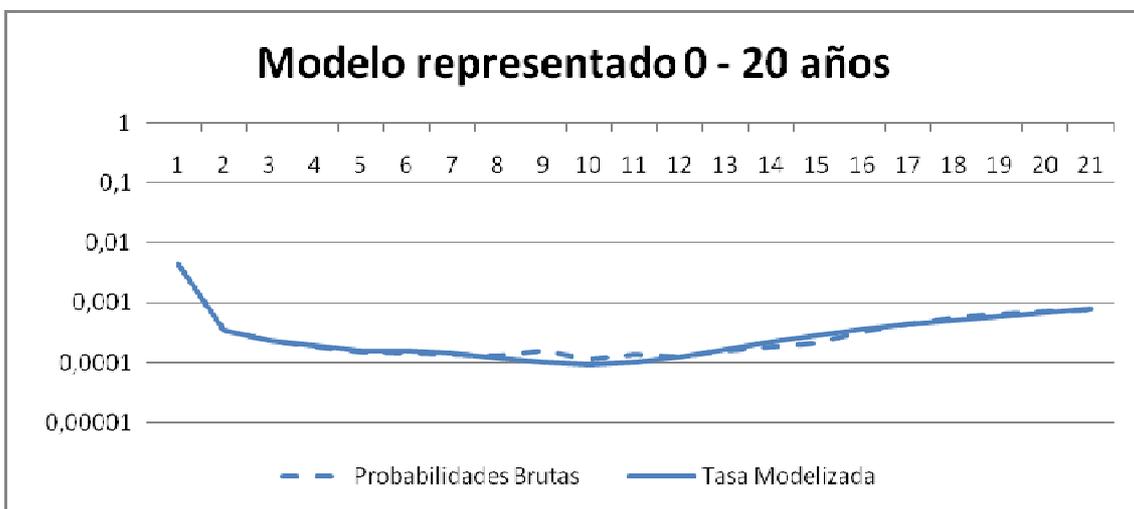


Gráfico 17. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 0 años hasta los 20 años.

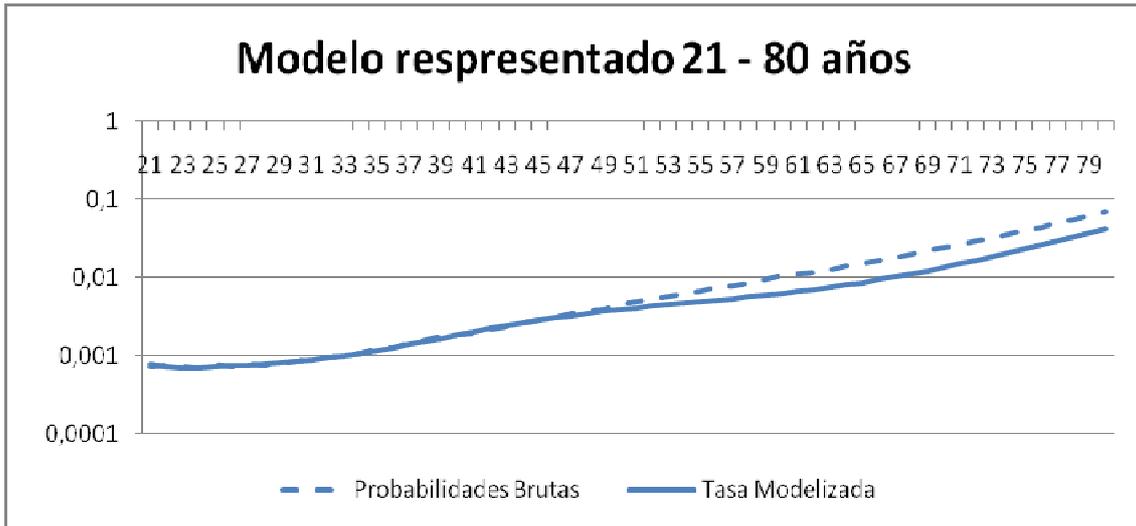


Gráfico 18. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 21 años hasta los 80 años.

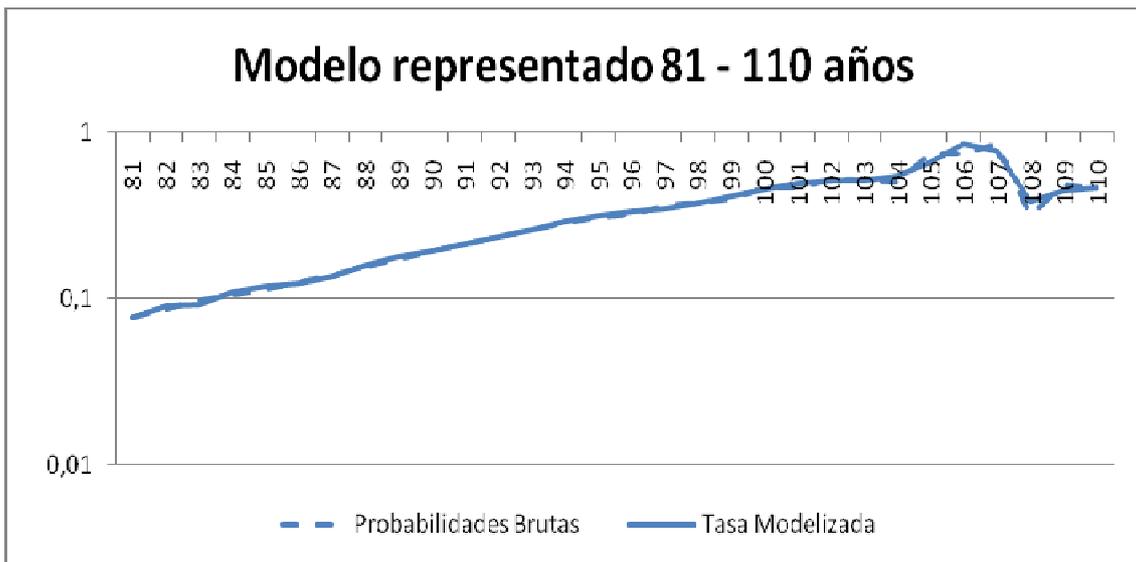


Gráfico 19. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 81 años hasta los 110 años.

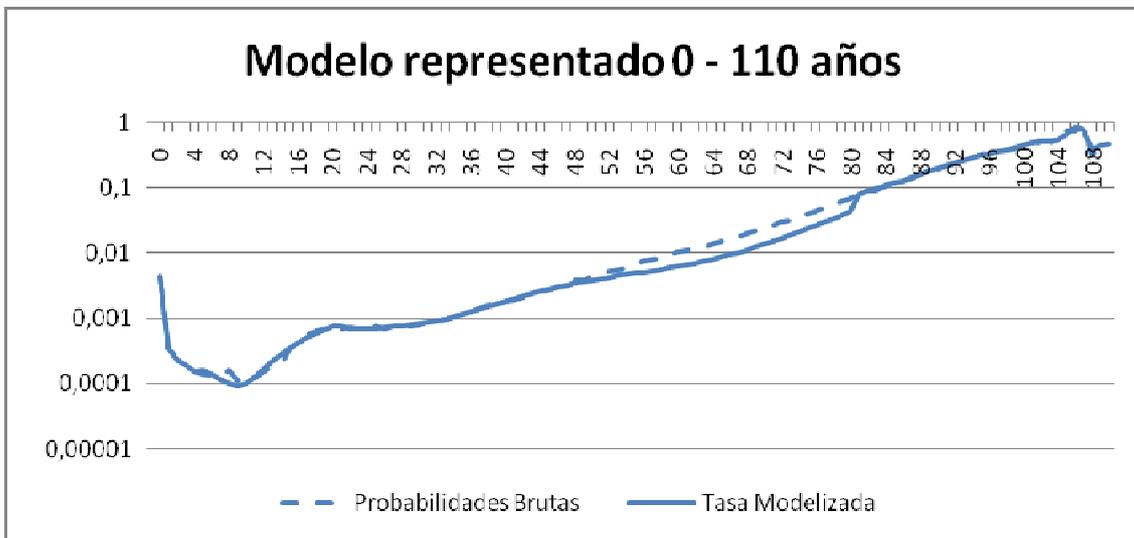


Gráfico 20. Presentación grafica del modelo seleccionado desde los 0 años hasta los 110.

5.4. Nivel de ajuste y test estadísticos para el modelo seleccionado sexo masculino.

El modelo como se ha mencionado anteriormente, se ha seleccionado en base a los criterios de ajuste, suavidad, número de parámetros coeficiente de determinación y validación del test de la chi-cuadrado.

En esta sección se presenta más en profundidad el resultado del ajuste y de los test estadísticos. El coeficiente de determinación y el test de la chi-cuadrado se ha realizado para cada uno de los modelos seleccionados y para el resultado del modelo agregado.

5.4.1. Coeficiente de determinación, R^2 .

El coeficiente de determinación calculado como el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson determina la proporción de la varianza del modelo ajustado, que puede atribuirse a la varianza de las tasas brutas, por lo tanto, mide el nivel de ajuste del modelo a los datos observados. Los valores arrojados para los tramos analizados son:

$$R^2_{0-20(GM(7,3))} = 99,87\%$$

$$R^2_{21-80(GM(5,9))} = 99,68\%$$

$$R^2_{81-110(GM(10,9))} = 97,44\%$$

$$R^2_{0-110} = 99,02\%$$

Por lo que podemos afirmar que los modelos seleccionados y el modelo agregado se ajustan a las tasas brutas de fallecimiento con un coeficiente de determinación alto, cercano a 1, en consecuencia el ajuste es bueno.

Formalmente el cálculo del coeficiente de determinación:

$$R^2 = \left(\frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \right)^2$$

donde

$$\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})$$

σ_x , es la desviación estándar de las tasas brutas

σ_y , es la desviación estándar del modelo de cada uno de los modelos

5.4.2. Test de la Chi cuadrado

Este test permite determinar el nivel de significación global del modelo, es decir, si el modelo ajustado es significativamente representativo de la experiencia de la observados (tasas brutas de fallecimiento)

Formalmente, sea la hipótesis nula:

H_0 : Las tasas del modelo ajustado son *iguales* a las tasas brutas,

la hipótesis alternativa:

H_A : Las tasas del modelo ajustado son *distintas* a las tasas brutas

y el nivel de significación, α , el 5 por ciento

$P - value = 5\%$

El estadístico chi-cuadrado,

$$\chi^2 = \frac{(\text{InválidosObservados} - \text{InválidosEsperados})^2}{\text{InválidosEsperados}}$$

El estadístico se compara en tablas para el nivel de significación y grados de libertad adecuados:

Para cada modelo:

GM(7,3), desde 0 años hasta los 20:

$$\chi^2_{0-20(GM(7,3))} = 0,99,$$

$$P - value_{0-20(GM(7,3))} = 100\%$$

y el valor crítico,

$$\chi_{10;0,05}^2 = 18,31$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

GM(5,9), desde los 21 años hasta los 80:

$$\begin{aligned}\chi_{21-80(GM(5,9))}^2 &= 1,00, \\ P - value_{20-80(GM(5,9))} &= 100\%\end{aligned}$$

y el valor crítico,

$$\chi_{46;0,05}^2 = 62,83$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

GM(10,9), desde los 81 años hasta los 110

:

$$\begin{aligned}\chi_{81-110(GM(10,9))}^2 &= 0,99, \\ P - value_{81-110(GM(10,9))} &= 100\%\end{aligned}$$

y el valor crítico,

$$\chi_{11;0,05}^2 = 19,68$$

Si calculamos el $P - value$ para el modelo agregado, es decir, para todas las edades, tenemos que:

$$P - value_{0-110} = 100\%$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

Para ambos casos se establece el nivel de significación en el 5 por ciento por lo que se debería rechazar la hipótesis nula (existirá evidencia estadística de que las tasas del modelo ajustado son significativamente distintas a las tasas brutas) si el $P - value$ arrojado por cada tramo fuese inferior al 5 por ciento, cuanto mayor sea este valor mayor significación estadística de que ambas tasas son significativamente iguales.

En este caso los modelos propuestos ofrecen valores superiores al 5 por ciento. En conclusión, dados los valores arrojados podemos afirmar que los modelos presentados se ajustan significativamente a las tasas brutas.

5.5. Elección del modelo sexo femenino.

Para el sexo femenino trabajaremos bajo el mismo esquema de funcionamiento escrito en los puntos precedentes. De igual modo que para el sexo masculino trabajaremos sobre todo el rango de edades, es decir, desde la edad 0 hasta la edad 110 años.

Para garantizar un ajuste lo más satisfactorio posible, se realizan ensayos partiendo el colectivo de estudio en grupos de edades de 0 a 20 años, 21 a 80 años y de 81 a 110 años. De esta forma el ajuste entre el modelo matemático y las tasas brutas de fallecimiento es mucho más favorable.

Para cada uno de los grupos de edad, en base a los modelos matemáticos resultantes se seleccionaron aquellos que mejor cumple los criterios, suavidad, número de parámetros, coeficiente de determinación y test estadístico de la chi-cuadrado.

El modelo que mejor se ajusta a los datos, evaluados todos los ensayos con los criterios expuestos en el párrafo anterior:

$$\text{Modelos seleccionado sexo femenino} \begin{cases} \text{GM}(7,3), \text{ si } 0 \leq \text{edad} < 21 \\ \text{GM}(7,2), \text{ si } 21 \leq \text{edad} < 81 \\ \text{GM}(10,8), \text{ si } 81 \leq \text{edad} \end{cases}$$

	0 a 20 (GM(7,3))	21 a 80 (GM(7,2))	81 a 110 (GM(10,8))	0 a 110 Modelo Agregado
R ²	0,999724293	0,999712972	0,999339684	0,999760793
P-value (X ²)	1,000000000	1,000000000	1,000000000	1,000000000

Cuadro 3. Resumen estadístico

Viendo el resultado del estadístico de la chi-cuadrado podemos afirmar que los modelos propuestos para cada tramo se ajustan de forma correcta. En adición, el modelo agregado resultante de agrupar los modelos de los diferentes tramos de edad también pasa de forma favorable el test estadístico de la chi-cuadrado. Por este motivo no rechazaremos la hipótesis nula de que las tasas de fallecimiento modelizadas son semejantes a las tasas brutas de fallecimiento.

A continuación presentaremos la representación grafica del modelo junto con las tasas brutas para cada uno de los tramos de edad seleccionado y para el modelo agregado.

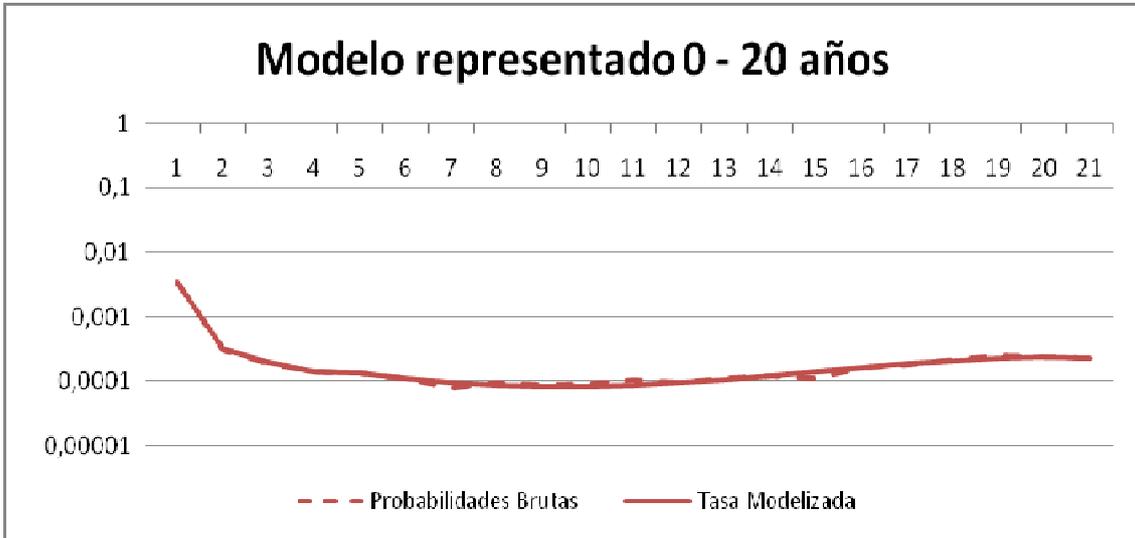


Gráfico 21. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 0 años hasta los 20 años.

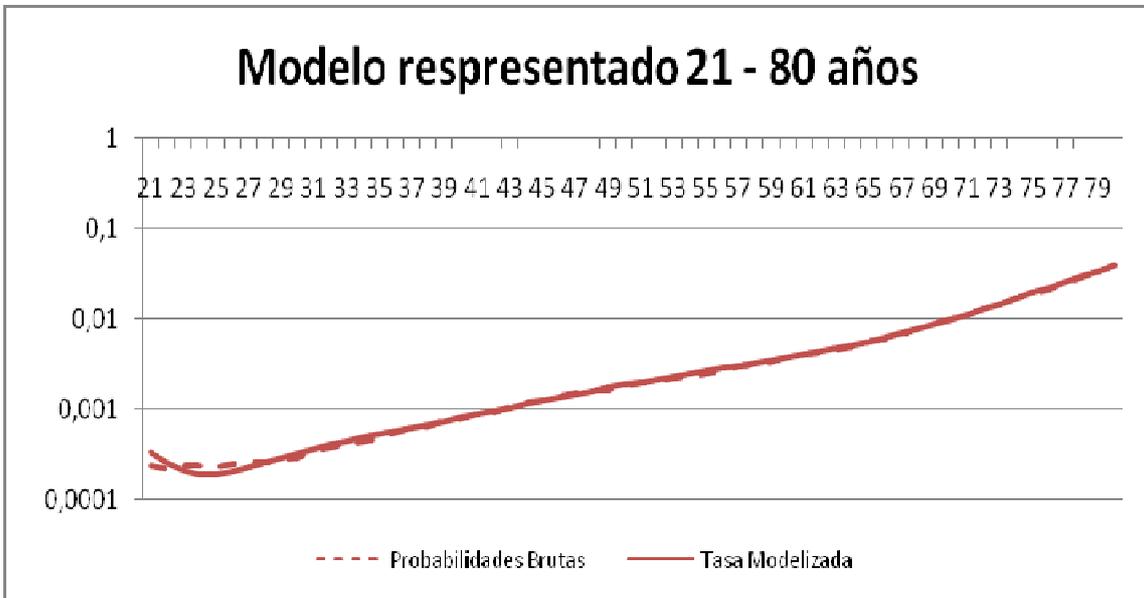


Gráfico 22. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 21 años hasta los 80 años.

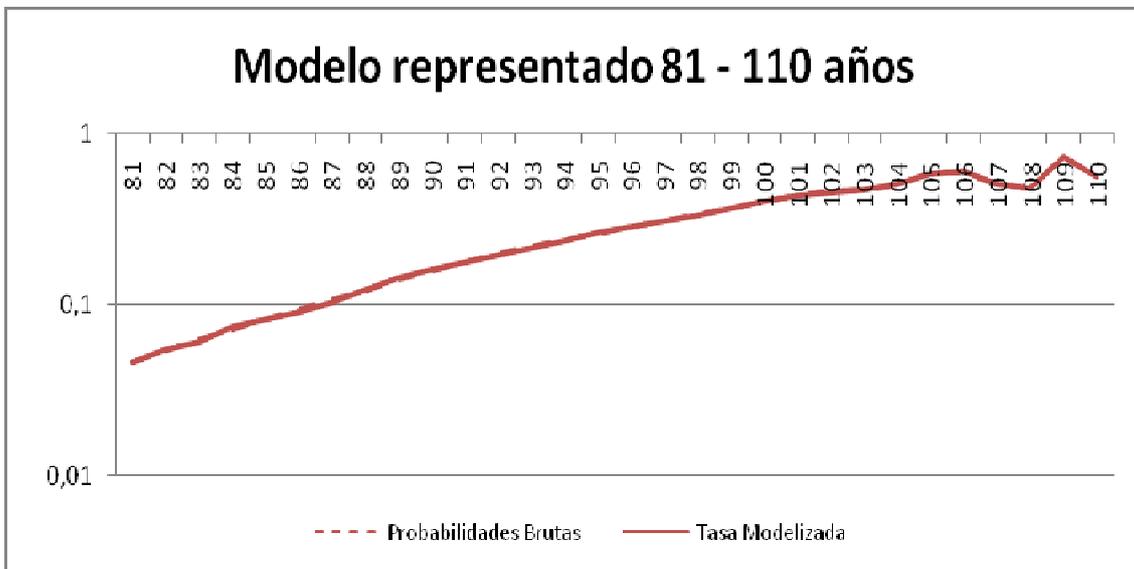


Gráfico 23. Presentación grafica del modelo seleccionado para las edades desde los 81 años hasta los 110 años.

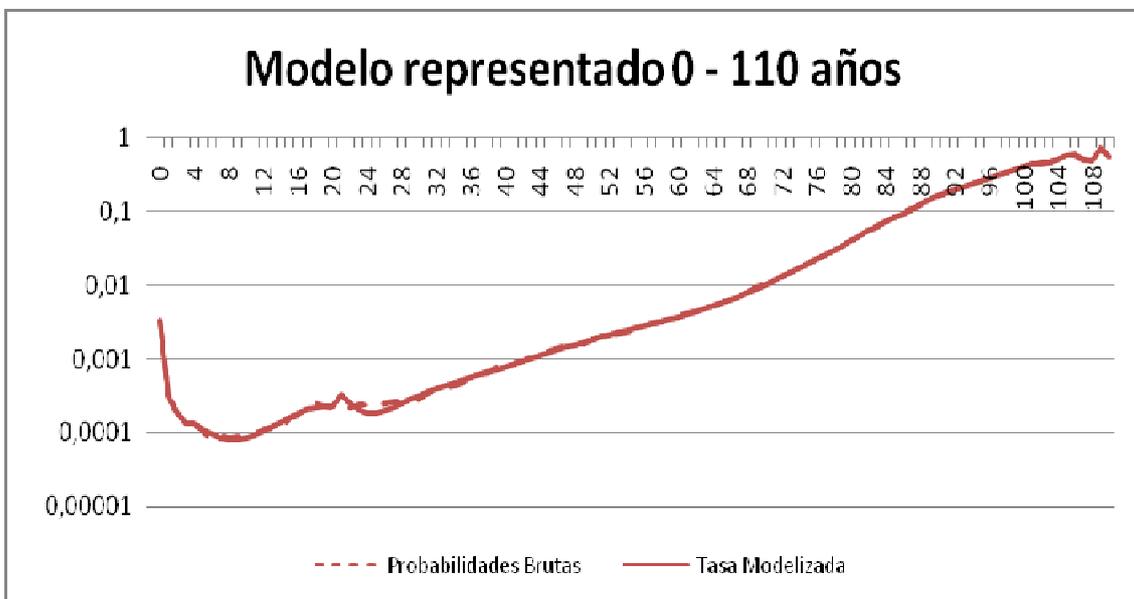


Gráfico 24. Presentación grafica del modelo seleccionado desde los 0 años hasta los 110.

5.6. Nivel de ajuste y test estadísticos para el modelo seleccionado sexo femenino.

En esta sección se presenta más en profundidad el resultado del ajuste y de los test estadísticos. El coeficiente de determinación y el test de la chi-cuadrado se han realizado para cada uno de los modelos seleccionados y para el resultado del modelo agregado.

5.6.1. Coeficiente de determinación, R^2 .

El coeficiente de determinación calculado como el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson mide el nivel de ajuste del modelo a los datos observados. Los valores arrojados para los tramos analizados son:

$$R_{0-20(GM(7,3))}^2 = 99,97\%$$

$$R_{21-80(GM(7,2))}^2 = 99,97\%$$

$$R_{81-110(GM(10,8))}^2 = 99,93\%$$

$$R_{0-110}^2 = 99,97\%$$

Por lo que podemos afirmar que los modelos seleccionados y el modelo agregado se ajustan a las tasas brutas de fallecimiento con un coeficiente de determinación alto, cercano a 1, en consecuencia el ajuste es bueno.

5.6.2. Test de la Chi cuadrado

Veamos ahora si el modelo ajustado es significativamente representativo de la experiencia observada.

Formalmente, sea la hipótesis nula:

$$H_0 : \text{Las tasas del modelo ajustado son } \textit{iguales} \text{ a las tasas brutas,}$$

la hipótesis alternativa:

$$H_A : \text{Las tasas del modelo ajustado son } \textit{distintas} \text{ a las tasas brutas}$$

y el nivel de significación, α , el 5 por ciento

$$P - \textit{value} = 5\%$$

El estadístico se compara en tablas para el nivel de significación y grados de libertad adecuados:

Para cada modelo:

GM(7,3), desde 0 años hasta los 20:

$$\chi_{0-20(GM(7,3))}^2 = 0,99,$$

$$P - \textit{value}_{0-20(GM(7,3))} = 100\%$$

y el valor crítico,

$$\chi_{10;0,05}^2 = 18,31$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

GM(7,2), desde los 21 años hasta los 80:

$$\chi^2_{21-80(GM(5,9))} = 1,00 ,$$
$$P - value_{20-80(GM(5,9))} = 100\%$$

y el valor crítico,

$$\chi^2_{51;0,05} = 68,67$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

GM(10,9), desde los 81 años hasta los 110

:

$$\chi^2_{81-110(GM(10,9))} = 0,99 ,$$
$$P - value_{81-110(GM(10,9))} = 100\%$$

y el valor crítico,

$$\chi^2_{12;0,05} = 21,03$$

Si calculamos el $P - value$ para el modelo agregado, es decir, para todas las edades, tenemos que:

$$P - value_{0-110} = 100\%$$

No se rechaza la hipótesis nula, es decir, las tasas del modelo seleccionado son iguales a las tasas de fallecimiento brutas.

Para todos los casos presentados se establece el nivel de significación en el 5 por ciento por lo que se debería rechazar la hipótesis nula (existirá evidencia estadística de que las tasas del modelo ajustado son significativamente distintas a las tasas brutas) si el $P - value$ arrojado por cada tramo fuese inferior al 5 por ciento, cuanto mayor sea este valor mayor significación estadística de que ambas tasas son significativamente iguales.

En este caso los modelos propuestos ofrecen valores superiores al 5 por ciento. En conclusión, dados los valores arrojados podemos afirmar que los modelos presentados se ajusta significativamente a las tasas brutas.

6. Recargos de seguridad.

6.1 Recargo por desviación (sexo masculino / sexo femenino).

A efectos de poder cubrir las desviaciones de los siniestros producidos respecto a los siniestros esperados con el modelo se calcula el recargo de desviación³.

El recargo de desviación ha de ser tal que el número de casos de fallecimientos esperados de una cartera “mediana”, ya aplicado este recargo, coincida con el máximo de casos de fallecimiento esperados en la cartera modelo, con una confianza de $1 - \alpha = 99\%$. Es decir:

$$P(T \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha$$

Con

T Número de casos de fallecimiento

\bar{T} Número a determinar de casos de fallecimiento esperados

Se calcula un factor de seguridad constante para todas las edades c , mayor que uno, con lo que se calculan probabilidades de ocurrencia ya recargadas:

$$q_x^c = c \cdot q_x$$

Contando con suficientes observaciones, tenemos una aproximación a una distribución normal con valor esperado:

$$E(T) = E\left(\sum_{x=0}^{110} q_x\right) = \sum_{x=0}^{110} E(q_x) = \sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x$$

Y varianza

$$Var(q_x) = \text{var}\left(\sum_{x=0}^{110} q_x\right) = \sum_{x=0}^{110} \text{var}(q_x) = \sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x)$$

Siendo el límite superior de tolerancia:

$$\bar{T} = E(T) + \mu_{1,\alpha} \cdot \sqrt{Var(T)}$$

En el que $\mu_{1,\alpha}$ define el fractil α de la distribución estándar.

$$\bar{T} = \sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x = c \cdot \sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x = c \cdot E(T)$$

Se deriva el factor de seguridad c

³ Recargos por desviación. Tablas de invalidez de la población asegurada española (PEAIM/F-2007), diciembre 2007

$$c = 1 + \frac{\mu_{1-\alpha} \sqrt{\sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x \cdot (1 - q_x)}}{\sum_{x=0}^{110} L_x \cdot q_x}$$

De donde el factor de seguridad C_{recargo} es:

$$u_{1-\alpha} = 1'96$$

siendo el recargo,

$$C_{\text{Rdesviación}}^{\text{Smasculino}} = 1,00276839$$

$$C_{\text{Rdesviación}}^{\text{Sfemenino}} = 1,003327371$$

6.2. Recargo por cambio (sexo masculino / sexo femenino).

Se propone aplicar un recargo para tomar en consideración posibles cambios en la siniestralidad en el futuro⁴. Mediante este recargo se intenta fijar un parámetro de tal forma que para todas las edades las tasas de fallecimiento propuestas sean suficientes aplicando el recargo por desviación y el recargo por cambio. Es decir, calcular r minimizando la siguiente expresión

$$\sum_{x=0}^{110} \text{Min}(\hat{q}_x \cdot c \cdot r - q_x; 0)$$

Minimizando la expresión expuesta obtenemos un valor de:

$$r_{\text{Rcambio}}^{\text{Smasculino}} = 1,75846323$$

$$r_{\text{Rcambio}}^{\text{Sfemenino}} = 1,046132251$$

7. Tanto de mejora sexo masculino y sexo femenino.

En los puntos precedentes hemos realizado en primer lugar un análisis de los datos, y en segundo lugar hemos graduado los datos y producido las tablas de mortalidad ajustando a la fórmula clásica de Gompertz – Makeham.

En este punto nuestro objetivo es pasar a calcular un tanto de mejora para poder obtener una tabla de mortalidad dinámica a partir de una tabla de mortalidad estática.

⁴ Recargos por cambio. Tablas de invalidez de la población asegurada española (PEAIM/F-2007), diciembre 2007

En este punto realizaremos la dinamización de las tablas dinámicas desde de dos formas diferentes. En primer lugar, llevaremos a cabo un cálculo del factor de mejora en base a la experiencia observada en la base de datos. Indicar que la base de datos con la que contamos cuenta con información que va desde el año 1908 hasta el año 2006. Una vez hayamos obtenido el factor de mejora, este tanto se lo aplicaremos a la tabla base para obtener un tabla de mortalidad en base al año de nacimiento.

En segundo lugar, vamos a dinamizar la tabla base en función del tanto de mejora aplicado a las tablas PERM/F2000P. Es decir, aplicaremos los tantos de mejora publicados en la Resolución de 3 de octubre de 2000, de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones en relación con las tablas de mortalidad y supervivencia a utilizar por las entidades aseguradoras.

7.1. Factor de mejora de la mortalidad $RF(x; t)$ (PERM/F2006).

Vamos a proyectar los tantos de fallecimiento por aplicación de factores de reducción derivados de la consideración de mejoras pasadas y probables mejoras futuras aplicando el factor de mejora de la mortalidad $RF(x; t)$, para un individuo que ha alcanzado la edad x en el tiempo t , donde está medido en años a partir de un origen apropiado:

$$q_{x,t} = q_{x,0} \cdot RF(x, t)$$

Donde $q_{x,0}$ es el tanto de mortalidad de la tabla base tanto para el sexo masculino como para el sexo femenino, en nuestro caso se elaborada a partir de los datos del año 2004 al 2006.

Dado que disponemos en nuestra base de datos de información desde el año 1908 al año 2006, en base a esta experiencia y junto con las tablas bases modelizadas recargadas con el recargo de desviación y con el recargo por cambio podemos llevar a cabo la creación de unas tablas dinámicas generacionales para cada sexo.

Se adjuntan como anexo I para el sexo masculino, y como anexo II para el sexo femenino, al presente documento las tablas generacionales creadas a partir de la experiencia española desde los años 1908 al año 2006. Denominaremos a dichas tablas PERM/F2006.



7.2. Factor de mejora correspondiente a las tablas PERM/F-2000P (PERM/F2006 Resolución 03102000).

En este punto, como ya hemos explicado anteriormente vamos a proceder a aplicar sobre la tabla base, con los recargos que hemos calculado, el factor de mejora utilizado para la obtención de las tablas generacionales PERM/F-2000P.

El factor de mejora utilizado en el cálculo de las tablas generacionales de PERM/F-2000P es el siguiente:

Año de Nacimiento	Tabla Base qx (en tanto por mil)		Factor de mejora de qx (λ)	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
2006	7,598	3,568	0,0150	0,0400
2005	0,612	0,325	0,0150	0,0400
2004	0,419	0,204	0,0150	0,0400
2003	0,350	0,143	0,0150	0,0400
2002	0,279	0,138	0,0150	0,0400
2001	0,287	0,116	0,0150	0,0400
2000	0,256	0,101	0,0150	0,0400
1999	0,213	0,091	0,0150	0,0400
1998	0,179	0,086	0,0150	0,0400
1997	0,166	0,085	0,0150	0,0400
1996	0,180	0,089	0,0150	0,0400
1995	0,223	0,098	0,0150	0,0400
1994	0,295	0,111	0,0150	0,0400
1993	0,390	0,128	0,0150	0,0400
1992	0,504	0,149	0,0150	0,0400
1991	0,631	0,172	0,0150	0,0400
1990	0,765	0,196	0,0150	0,0400
1989	0,904	0,218	0,0150	0,0300
1988	1,047	0,235	0,0150	0,0300
1987	1,197	0,243	0,0150	0,0270
1986	1,364	0,237	0,0150	0,0270
1985	1,346	0,352	0,0150	0,0270
1984	1,245	0,266	0,0150	0,0270
1983	1,214	0,217	0,0150	0,0270
1982	1,224	0,196	0,0150	0,0270
1981	1,255	0,195	0,0150	0,0270
1980	1,295	0,210	0,0150	0,0270
1979	1,338	0,234	0,0150	0,0270
1978	1,384	0,266	0,0150	0,0270
1977	1,434	0,301	0,0150	0,0270
1976	1,491	0,339	0,0150	0,0270

1975	1,559	0,379	0,0150	0,0270
1974	1,644	0,419	0,0150	0,0270
1973	1,748	0,461	0,0150	0,0270
1972	1,877	0,504	0,0150	0,0270
1971	2,032	0,549	0,0150	0,0270
1970	2,215	0,597	0,0150	0,0270
1969	2,426	0,649	0,0150	0,0270
1968	2,666	0,705	0,0150	0,0270
1967	2,933	0,767	0,0150	0,0270
1966	3,225	0,835	0,0150	0,0270
1965	3,540	0,910	0,0150	0,0270
1964	3,873	0,992	0,0150	0,0270
1963	4,223	1,083	0,0150	0,0270
1962	4,584	1,181	0,0150	0,0270
1961	4,953	1,287	0,0150	0,0270
1960	5,328	1,402	0,0150	0,0270
1959	5,704	1,524	0,0150	0,0260
1958	6,081	1,654	0,0150	0,0260
1957	6,455	1,791	0,0150	0,0260
1956	6,826	1,936	0,0150	0,0260
1955	7,195	2,087	0,0150	0,0250
1954	7,562	2,245	0,0150	0,0250
1953	7,929	2,411	0,0150	0,0250
1952	8,301	2,584	0,0150	0,0250
1951	8,682	2,766	0,0150	0,0250
1950	9,079	2,959	0,0150	0,0250
1949	9,499	3,165	0,0150	0,0250
1948	9,953	3,387	0,0150	0,0250
1947	10,450	3,629	0,0150	0,0250
1946	11,005	3,896	0,0150	0,0250
1945	11,631	4,196	0,0150	0,0250
1944	12,346	4,537	0,0150	0,0250
1943	13,168	4,927	0,0150	0,0250
1942	14,118	5,379	0,0150	0,0250
1941	15,218	5,907	0,0150	0,0250
1940	16,495	6,527	0,0150	0,0250
1939	17,976	7,257	0,0150	0,0250
1938	19,692	8,118	0,0150	0,0250
1937	21,676	9,135	0,0150	0,0250
1936	23,965	10,335	0,0150	0,0250
1935	26,600	11,751	0,0150	0,0250
1934	29,623	13,415	0,0150	0,0250
1933	33,082	15,369	0,0150	0,0250
1932	37,031	17,654	0,0150	0,0250
1931	41,526	20,320	0,0150	0,0250

1930	46,630	23,419	0,0150	0,0250
1929	52,410	27,011	0,0150	0,0250
1928	58,942	31,158	0,0150	0,0250
1927	66,308	35,932	0,0150	0,0250
1926	74,597	41,410	0,0150	0,0250
1925	135,198	48,569	0,0150	0,0250
1924	157,271	57,149	0,0150	0,0250
1923	160,532	63,741	0,0150	0,0250
1922	191,327	77,676	0,0150	0,0250
1921	208,134	86,653	0,0150	0,0250
1920	216,802	94,127	0,0150	0,0250
1919	239,629	109,027	0,0150	0,0240
1918	276,058	129,528	0,0150	0,0230
1917	311,858	150,363	0,0150	0,0220
1916	340,993	168,818	0,0150	0,0210
1915	370,262	185,563	0,0150	0,0200
1914	408,640	203,261	0,0150	0,0190
1913	456,993	224,405	0,0150	0,0180
1912	507,302	249,372	0,0150	0,0170
1911	549,891	275,894	0,0150	0,0160
1910	582,267	300,897	0,0150	0,0150
1909	613,121	324,197	0,0150	0,0150
1908	657,364	350,488	0,0135	0,0135

Tabla 1. Continente los tantos de mortalidad de la tabla base y el factor de mejora por el año de nacimiento.

Tal y como se indica en la RESOLUCIÓN de 3 de octubre de 2000, llevaremos a cabo el cálculo de la tabla de mortalidad de cada generación de la siguiente forma.

“Dada una persona asegurada que ha cumplido x años en el ejercicio 2.000 (nacida por tanto en año $A = 2000 - x$), corresponde generar la tabla a aplicar, es decir, deben calcularse las diferentes $q(x+t; A)$ para todo los valores enteros necesarios de la t . Para ello se aplicará la siguiente fórmula:

$$q(x+t; A) = q(x+t; \text{tablabase}) * e^{[-\lambda_{x+t} * t]}$$

Donde $q(x+t; \text{tablabase})$ es el tanto anual de la mortalidad consignado en la tabla base para el año de nacimiento = $2006 - (x+t)$, siendo λ_{x+t} el factor de mejora de la supervivencia reflejado para el citado año, y pudiendo aproximarse el número e con el valor 2,718281828.

Ejemplo 1: El tanto anual de mortalidad a los 70 años de la tabla a aplicar a un hombre que cumplió 40 años en el ejercicio 2.006 (por tanto, nacido 1966) se calculará:

$$q(70;1966) = q(70;tablabase) * e^{[-\lambda_{70}*(70-40)]}$$

Donde $q(70;tablabase)$ es el consignado para el año 1.936 (2006 – 70) y λ_{70} es el factor de mejora consignado también para el año 1.936....”

$$q(70;1966) = 0,024 * e^{[-0,0150*(30)]} = 0,01528101”$$

En base a las tablas bases modelizadas recargadas con el recargo de desviación y con el recargo por cambio podemos llevar a cabo la creación de unas tablas dinámicas generacionales para cada sexo aplicando la formulación detallada en los párrafos anteriores. Validaremos que el tanto de mortalidad sea como máximo 1 y que el número de personas vivas a la edad de 110 años sea igual a 0.

Se adjuntan como anexo III para el sexo masculino, y como anexo IV para el sexo femenino, al presente documento las tablas generacionales creadas a partir de la tabla base, creada a raíz de la experiencia española desde los años 2004 al año 2006, ambos inclusive y aplicando los tantos de mejoras publicados en la resolución del 3 de octubre de 2000. Denominaremos a dichas tablas PERM/F2006 (Resolución 03102000).



Anexo III
PERM-2006 Resolució



Anexo IV PERF-2006
Resolución 03102000

8. Aplicación de las tablas a productos aseguradores. Comparación con las tablas de referencia PERM/F-2000P y PERM/F-2000C.

En este punto vamos a realizar una comparación de las tablas creadas con las tablas generacionales de referencia del mercado español, es decir, las tablas PERM/F-2000P Y PERM/F-2000C.

Para ello, tomaremos una operación básica en el mercado asegurador, una renta diferida al momento de la jubilación (65 años), vitalicia, con y sin reversión y pospagable al devengo.

Nos fijaremos, en un grupo de personas a edades cercanas a la jubilación. Normalmente a partir de los 50 años las personas comienza a percibir la sensación de cercanía de la edad de jubilación, por lo que se incrementan las aportaciones a planes de pensiones y contrataciones de operaciones de seguro para complementar las prestaciones de la seguridad social y no perder poder adquisitivo con respecto a la vida como activo en el momento de la jubilación.

Con todo lo indicado en los párrafos anteriores calcularemos la provisión matemática a 31/12/2008 para un importe de renta de 1.000,00 euros mensuales, con reversión del 50% y sin reversión, con pagas extras los meses de junio y diciembre, creciente al 1,50% de forma geométrica cada uno de enero desde el inicio del devengo de la prestación y con un tipo de interés vitalicio del 3,00%

8.1. Tablas PERM/F2006 versus tablas PERM/F-2000C y PERM/F-2000P.

A continuación adjunto cuadro comparativos de primas para tablas de referencia para el sexo masculino y para el sexo femenino:

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo	65 años	Meses pagas dobles	Junio y diciembre
		Interés Anual	3%

HOMBRES							
EDAD	PERM2006	PERM2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERM2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	57.730	125.965	118,19%	0,11%	139.126	140,99%	-0,25%
50	72.090	144.401	100,31%	-0,12%	158.619	120,03%	-0,53%
55	82.615	167.014	102,16%	-1,08%	182.181	120,52%	-1,56%
65	132.565	232.994	75,76%	-4,35%	249.495	88,21%	-5,09%

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo	65 años	Meses pagas dobles	Junio y diciembre
Segundo asegurado	Mujer, 5 años menos	Interés Anual	3%
Reversión	50%		

HOMBRES							
EDAD	PERM2006	PERM2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERM2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	63.535	137.606	116,58%	0,18%	151.339	138,20%	-0,16%
50	78.130	158.198	102,48%	-0,12%	173.128	121,59%	-0,51%
55	91.493	183.556	100,62%	-0,93%	199.563	118,12%	-1,38%
65	144.604	258.370	78,67%	-4,34%	275.849	90,76%	-5,04%

(1): Porcentaje a aplicar sobre la tabla PER2000 para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

(2): Tipo de interés técnico a aplicar a los flujos calculados con la tabla PER2000P para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

Cuadro 4. Comparación de primas sexo masculino PERM2006 versus PERM-2000C Y PERM-2000P.



Cuadro 5. Comparación de primas sexo femenino PERF-2006 versus PERF-2000C Y PERF-2000P.

A la vista de los resultados de los cuadros anteriores podemos asegurar que el colectivo analizado tiene una mayor mortalidad, por este motivo las primas que necesitamos cobrar para poder asegurar una pensión como la indicada en los cuadros anteriores es de una cuantía mucho menor que la prima que se debe cobrar para la misma operación pero utilizando las tablas que ha día de hoy son referencia en el mercado asegurador español, como son las PERM/F-2000P y las PERM/F-2000C.

Es interesante comparar el gap que se produce entre las tablas modelizadas y las tablas de referencia entre ambos sexos. Si nos fijamos en el tipo de interés equivalente que podríamos ofrecer a nuestros clientes para mantener el nivel de la provisión matemática, vemos que el tipo de interés es muy inferior al tipo de interés asegurado en las hipótesis (3,00%), e incluso en algún caso la rentabilidad que le podríamos ofrecer al cliente es negativa y aún así nuestras provisiones matemáticas no disminuirían. Ahora bien, si comparamos este dato por sexo observamos que el sexo femenino tiene una evolución diferente al sexo masculino, es decir, la mortalidad para el sexo femenino, aunque aumenta, no aumenta tanto en proporción al aumento en la mortalidad que experimenta el sexo masculino.

Tras un análisis de este tipo nos podemos plantear una serie de cuestiones a nivel estratégico, como por ejemplo:

- ¿Es rentable este negocio? ¿Debemos continuar invirtiendo en este ramo? En caso, afirmativo, ¿Qué podemos hacer para crecer en este negocio más que nuestros competidores?
- ¿Debemos cubrir nuestro riesgo en el aseguramiento de la supervivencia con operaciones de reaseguro?
- ¿Qué impacto tiene a nivel de exigencias de capital de Solvencia II lo observado por estas tablas?

8.2. Tablas PERM/F2006 Resolución 03102000 versus tablas PERM/F-2000C y PERM/F-2000P.

A continuación adjunto cuadro comparativos de primas para tablas de referencia para el sexo masculino y para el sexo femenino:

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo	65 años	Meses pagas dobles	Junio y diciembre
		Interés Anual	3%

HOMBRES							
EDAD	PERM2006 Resolución	PERM2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERM2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	58.428	125.965	115,59%	0,15%	139.126	138,12%	-0,19%
50	67.751	144.401	113,13%	-0,46%	158.619	134,12%	-0,85%
55	80.723	167.014	106,90%	-1,31%	182.181	125,69%	-1,77%
65	129.606	232.994	79,77%	-4,97%	249.495	92,50%	-5,70%

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo	65 años	Meses pagas dobles	Junio y diciembre
Segundo asegurado	Mujer, 5 años menos	Interés Anual	3%
Reversión	50%		

HOMBRES							
EDAD	PERM2006 Resolución	PERM2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERM2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	63.237	137.606	117,60%	0,16%	151.339	139,32%	-0,19%
50	73.179	158.198	116,18%	-0,42%	173.128	136,58%	-0,83%
55	87.176	183.556	110,56%	-1,24%	199.563	128,92%	-1,72%
65	142.148	258.370	81,76%	-4,92%	275.849	94,06%	-5,69%

(1): Porcentaje a aplicar sobre la tabla PER2000 para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

(2): Tipo de interés técnico a aplicar a los flujos calculados con la tabla PER2000P para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

Cuadro 6. Comparación de primas sexo masculino PERM2006 Resolución 03102000 versus PERM-2000C Y PERM-2000P.

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo		Meses pagas dobles	Junio y diciembre
		Interés Anual	3%

MUJERES							
EDAD	PERF2006 Resolución	PERF2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERF2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	80.424	159.527	173,03%	0,84%	171.716	193,90%	0,60%
50	89.255	182.430	169,26%	0,29%	195.885	189,13%	0,02%
55	100.519	209.106	159,04%	-0,45%	223.804	177,25%	-0,78%
65	140.990	278.297	114,73%	-3,06%	295.186	127,76%	-3,60%

Pensión Mensual Vitalicia	1.000	Crecimiento de la pensión	1,5%
Inicio devengo	65 años	Meses pagas dobles	Junio y diciembre
Segundo asegurado	Hombres, 5 años más	Interés Anual	3%
Reversión	50%		

MUJERES							
EDAD	PERF2006 Resolución	PERF2000C	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)	PERF2000P	% (1)	INTERÉS EQUIVALENTE (2)
45	92.388	172.179	172,28%	0,55%	184.821	192,27%	0,30%
50	103.766	197.328	169,65%	-0,12%	211.361	188,83%	-0,42%
55	118.795	226.801	160,17%	-1,11%	242.207	177,84%	-1,47%
65	176.186	304.582	114,27%	-5,51%	322.386	126,80%	-6,12%

(1): Porcentaje a aplicar sobre la tabla PER2000 para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

(2): Tipo de interés técnico a aplicar a los flujos calculados con la tabla PER2000P para conseguir la prima obtenida con la tabla modelizada

Cuadro 5. Comparación de primas sexo femenino PERF2006 versus PERF-2000C Y PERF-2000P.

Revisando los datos de los cuadros anteriores obtenemos conclusiones similares, es decir, podemos asegurar que el colectivo analizado tiene una mayor mortalidad, por este motivo las primas que necesitamos cobrar para poder asegurar una pensión como la indicada en los cuadros anteriores es de una cuantía mucho menor que la prima que se debe cobrar para la misma operación pero utilizando las tablas que ha día de hoy son referencia en el mercado asegurador español, como son las PERM/F-2000P y las PERM/F-2000C.

Si comparamos el gap que se produce entre las tablas modelizadas y las tablas de referencia entre ambos sexos. Si nos fijamos en el tipo de interés equivalente que podríamos ofrecer a nuestros clientes para mantener el nivel de la provisión matemática, vemos que el tipo de interés es muy inferior al tipo de interés asegurado en las hipótesis (3,00%), e incluso en algún caso la rentabilidad que le podríamos ofrecer al cliente es negativa y aún así nuestras provisiones matemáticas no disminuirían.

Del mismo modo que en el punto anterior, nos volvemos plantear las mismas preguntas:

- ¿Es rentable este negocio? ¿Debemos continuar invirtiendo en este ramo? En caso, afirmativo, ¿Qué podemos hacer para crecer en este negocio más que nuestros competidores?

- ¿Debemos cubrir nuestro riesgo en el aseguramiento de la supervivencia con operaciones de reaseguro?
- ¿Qué impacto tiene a nivel de exigencias de capital de Solvencia II lo observado por estas tablas?

9. Conclusiones / Decisiones.

Por último, analizaremos las cuestiones planteadas en los puntos anteriores para tomar decisiones a nivel estratégico y estableceremos una serie de conclusiones:

- ¿Es rentable este negocio? ¿Debemos continuar invirtiendo en este ramo? En caso, afirmativo, ¿Qué podemos hacer para crecer en este negocio más que nuestros competidores?

El beneficio técnico que estamos obteniendo es el gap que existe entre la mortalidad esperada medida con las tablas PERM/F-2000P y la mortalidad real. Por este motivo, podemos afirmar que de la comercialización de este tipo de producto se está obteniendo un gran beneficio técnico, al cual habría que sumar el beneficio financiero que se obtiene de este tipo de operaciones.

A la vista de los resultados debemos invertir en este producto e intentar crecer más que la media del sector.

Para crecer más que la media del sector debemos llevar a cabo una estrategia de comercialización más agresiva, con campañas de marketing orientadas a la venta de este tipo de productos y lanzar al mercado productos innovadores que compartan con nuestros asegurados parte del beneficio que ellos mismos nos reportan, ya sea o cobrándoles unas primas inferiores a la de nuestros competidores o ofreciendo mejores rentabilidades que la competencia, y/o participación en beneficios.

La modelización obtenida nos puede ayudar a marcar un suelo a la hora de ofrecer a nuestros clientes mayores rentabilidades, es decir, el órgano regulador marca unas tablas de mortalidad que deben ser utilizadas como mínimo. No obstante, nosotros hemos observado que el comportamiento de la mortalidad de nuestra cartera es mayor que la mortalidad esperada de las tablas fijadas por el órgano regulador. De esta manera, podemos ofrecer a nuestros clientes rentabilidades mayores, de manera que la combinación de las tablas mortalidad y la rentabilidad ofrecida no implique que debamos disminuir nuestro nivel de provisión matemática. El órgano regulador estará satisfecho porque no disminuimos nuestro nivel de provisión matemática y nuestros asegurados también al obtener rentabilidades mayores a las que se ofrecen en el mercado.

Indicar que, compartir con nuestros asegurados parte del beneficio técnico que obtenemos de la comercialización de nuestros productos nos ayuda a tener contentos a nuestros clientes y por tanto, fidelizarlos a nuestra compañía. Por otra parte, este comportamiento nos ayudará a crear un

imagen de la compañía en el exterior de empresa innovadora y eficiente, lo que sin lugar nos dejará en mejor posición para obtener nuevos asegurados.

- ¿Debemos cubrir nuestro riesgo en el aseguramiento de la supervivencia con operaciones de reaseguro?

Dado el gap favorable entre las tablas que se están comercializando en las operaciones de seguro de la supervivencia y la mortalidad observada por nuestra experiencia, no merece la pena contratar operaciones de reaseguro para cubrirnos en desviaciones en el riesgo de supervivencia.

No obstante, el riesgo de supervivencia en el ámbito de las entidades aseguradoras en un arma de doble filo, ya que tenemos como contraprestación el seguro de fallecimiento. Tal y como hemos comprobado la mortalidad observada por nuestra experiencia es mayor a la esperada por las tablas más populares en España. Por este motivo, quizás estemos incurriendo en un infravaloración de las primas que cobramos por el riesgo de fallecimiento, por ello es conveniente revisar las tarifas de fallecimiento.

Por otra parte, nos puede interesar contratar operaciones de reaseguro que nos cubran la posible desviación entre los siniestros de fallecimientos ocurridos durante el año y los esperados.

- ¿Qué impacto tiene a nivel de exigencias de capital de Solvencia II lo observado por estas tablas?

El proyecto de Solvencia II, tiene como objetivo proteger a los asegurados frente al riesgo de quiebra de las entidades aseguradoras. Por este motivo, se define unas exigencias de capital en función de la capacidad del asegurador de satisfacer sus obligaciones con sus asegurados.

En cuanto a las provisiones matemáticas, el proyecto de Solvencia II indica que deben calcularse mediante el Best Estimate, de esta forma se refleja de la forma más realista posible, el valor monetario de los contratos firmados entre asegurador y asegurado.

Mediante el presente estudio se ha realizado un modelización de la mortalidad para la experiencia observada. De este modo podemos afirmar que las tablas modelizadas son nuestro Best Estimate.

En el caso que nos ocupa, la mortalidad observada en nuestro modelo es inferior a la mortalidad esperada por las tablas comercializadas en el mercado español. Por ello, podríamos justificar al órgano de regulación local que en nuestro caso, las provisiones matemáticas que debemos mantener en el pasivo de nuestro balance son menores a las calculadas con las tablas de referencia.

No obstante, la experiencia y el principio de prudencia nos aconsejan que aunque observemos que nuestra cartera tiene un comportamiento mejor que el esperado, no rebajemos nuestro nivel de provisiones por temor a

desviación en el riesgo en el tiempo. En cualquier caso, si nuestra cartera continuase teniendo el mismo comportamiento el beneficio técnico aflorará en el momento de la finalización del contrato de seguro.

Mencionar que en el proceso de concentración de entidades aseguradoras que vivimos desde hace algunos años se hace necesario valorar las carteras de las compañías adquiridas de la forma más fiel posible. Realizando estudios disponemos de más información sobre el comportamiento del riesgo, lo cual, nos ayudará a tomar mejores decisiones y pagar el precio más justo en función de nuestra experiencia por la cartera de nuestros competidores.

Por último, me parece conveniente destacar que durante este trabajo hemos trabajado con una base de datos lo suficientemente grande para poder sacar conclusiones. Lamentablemente la masa crítica de las entidades aseguradoras acostumbra a ser más pequeña, por lo que se hace más difícil llegar a estimar un modelo.

10. Bibliografía.

<<http://www.mortality.org>>

DEBON AUCEJO, A. (2003). "Graduación de tablas de mortalidad. Aplicaciones actuariales". Tesis doctoral, Universidad de Valencia.

PORTUGAL, L. "Solvabilidad de Aseguradoras", Universidad de Barcelona 22-23 de Febrero 2008.

D. O. FORFAR, B.A., F.F.A., A.I.A., J.J. MCCUTCHEON, M.A., PH.D., F.F.A. AND A.D. WILDIE, M.A., F.F.A., F.I.A. "On graduation by mathematical formula" Journal of the Institute of Actuaries, 115, 1-149.

AYUSO, M; BOLANCÉ, C; GUILLÉN, VIDIELLA, A. (2003). "Fundamentos técnicos del seguro" Documentos docentes del Master de Dirección de Entidades Aseguradoras y Financieras.

ICEA. "Tablas de invalidez de la población asegurada española PEAIM/F-2007." Diciembre, 2007. ICEA, Madrid.

José Antonio Guerra Díez es Licenciado en Ciencias Actariales y Financieras por la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales del País Vasco. Es Actuario de Caifor, en el Departamento Técnico de Previsión Social.